Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4240

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.
3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

   À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4239

L'objet de cet exercice est, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée, de déterminer toutes les matrices R de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = M$. Une telle matrice sera appelée racine carrée de la matrice M et on la notera $\mathrm{rac}(M)$.

Dans tout cet exercice on considère $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. *On conviendra que les éléments diagonaux de D seront écrits par ordre croissant en partant du coefficient de la 1e ligne et 1ecolonne.*
2. Montrer l'équivalence suivante : (R est une racine carrée de A) $\Leftrightarrow$ $\big(S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de $D\big)$
3. On suppose dans cette question que S désigne une racine carrée de D.
   - **a.** Montrer que $DS = SD$.
   - **b.** Justifier que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(D) = \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
   - **c.** Montrer alors que :
     - **i.** $\forall X \in E_0(D)$, $SX \in E_0(D)$
     - **ii.** $\forall X \in E_1(D)$, $SX \in E_1(D)$
     - **iii.** $\forall X \in E_{16}(D)$, $SX \in E_{16}(D)$
   - **d.** En déduire que la matrice S est une matrice diagonale [a].
   - **e.** On note alors $S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$. Que valent s_1^2, s_2^2 et s_3^2 ?
4. Écrire alors toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées la matrice A admet-elle ?

a. on pourra admettre la question. Non pas qu'elle soit difficile mais c'est qu'elle est pas évidente à justifier

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4241

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

et on note A la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n.
   b. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. **a.** Démontrer que A admet une seule valeur propre.
   b. Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   a. Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

   et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.
   On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   b. À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   a. Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   b. Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).
   c. Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.