Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4991] | 1| Tirage dans une urne | G2E 2015 Filère BCPST

Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$.
On vide l'urne en extrayant toutes les boules de l'urne une à une, au hasard et sans remise.

(1). Pour tout entier i de $[\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i^{e} tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i.

(2). En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsqu'on vide l'urne.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4992] | 2| Étude d'une suite récurrente | ENS 2017 Filière D2-Cachan

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{(x+1)^2} \end{array} \right.$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de f, puis étudier les variations de f sur ce dernier.

(2).(a). Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(b). Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(3). On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a). Exprimer v_n à l'aide de u_n seulement.

(b). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 < v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$.

(4). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a : $2(n+1) \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

(5).(a). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

(b). Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.