Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1895

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = 2 \\ x^2y^2z^5 & = 3 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1895

- Ce n'est pas un système linéaire, donc on ne peut pas y appliquer l'algorithme de Gauss !
- L'indication $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$ doit nous mettre la puce à l'oreille...
- Le problème est de se ramener à un système linéaire, c'est à dire où il y a des sommes et non des produits.
- Et quoi de mieux qu'un logarithme pour transformer un produit en somme !
- On a alors un système linéaire dont les inconnues sont alors...

EX. 2 | Réf. 2022

Soit $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-1;1\right[$.
3. Donner alors une autre expression pour $f(x)$ sur $[-1;1]$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2022

1. L'étude du signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$ paraît plus que nécessaire...après est-ce suffisant ?
2. On utilise la formule de la dérivée d'une composée de la forme $f \circ u$. Il est conseillé de détailler ses calculs et de les organiser ensuite.
3. Si tout va bien, l'expression obtenue pour $f'(x)$ permet de reconnaître la dérivée d'une fonction bien connue. Reste à ajuster une éventuelle constante...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2980

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. À l'aide du binôme de Newton, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. **a.** Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$.

b. Justifier alors que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

a. Vérifier que : $\displaystyle\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$.

b. En explicitant $\displaystyle\binom{n+1}{k+1}$ à l'aide de factorielles, montrer alors que : $\displaystyle\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

4. Montrer alors à l'aide d'un changement d'indice que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}$ puis en déduire la valeur de la somme S_n.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2980

1. La question a déjà été traitée en cours...

2. a. Utiliser simplement le résultat de la question **(1)** en l'application à $n+1$.

b. Il suffit que dans la somme proposée, il n'y a pas les termes correspondants aux valeurs de $k = 0$et $k = 1$.

3. a. Utiliser la définition de $\displaystyle\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles.

b. Il suffit de manipuler les écritures avec les factorielles.

4. Utiliser le résultat de la question **(3)(b)** puis efffectuer un changement d'indice afin de pouvoir réutiliser les résultats des questions **(1)** et **(2)**.