Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2304

Résoudre à l'aide de sa représentation matricielle, le système : $\mathcal{S} : \begin{cases} x-2y+3z-2t=-12 \\ x-y+z-t=-5 \\ 2x+3y-z+2t=15 \\ 4x+y+z-2t=-1 \end{cases}$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2304

- Obtenir la représentation matricielle du système...
- Puis faire opérer l'algorithme de Gauss

EX. 2 | Réf. 2076

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1+\dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.
2. Factoriser le polynôme k^2+3k+2.
3. Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   On pourra utiliser la factorisation du polynôme k^2+3k+2.
4. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.
   On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2076

1. On réduit au même dénominateur.
2. C'est un polynôme de degré 2 en $k \in \mathbb{N}$...
3. Utiliser les propriétés opératoires du logarithme en utilisant les deux premières questions.
4. Il y a une somme téléscopique à faire apparaître PROPREMENT et des changements d'indices éventuelllement.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2303

On se propose dans cet exercice de donner une autre expression de $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$ où $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[, \quad \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

2. En déduire une expression de $f(x)$ en fonction seulement de $\tan$ et $\arctan$.

3. Justifier alors que : $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2} \text{ si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4} \text{ si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2303

1. Pour obtenir $\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$, il faut donc faire « apparaître » $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$ en remarquant par exemple que $\dfrac{\pi}{2} - x = 2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.
2. Un sinus est un cosinus déphasé !
3. Se souvenir que $\sqrt{x^2} = |x|$.