Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1375

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4667

On considère la matrice carré réelle d'ordre trois $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout réel a, la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. **a.** Déterminer une matrice D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$.
   b. En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de J, que, pour tout réel a, il existe une matrice diagonale D_a que l'on exprimera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
   c. Quel est l'ensemble des réels a tels qe M_a soit inversible ?
2. On cherche à présent à déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.
   a. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.
      i. Montrer que X commute avec M_a puis que X commute avec J.
      ii. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de J est vecteur propre de la matrice X.
      iii. Établir qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer que $\Delta^2 = D_a$.
   b. Conclure en donnant l'ensemble auquel doit appartenir le réel a pour que la matrice X vérifiant $X^2 = M_a$ existe.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4667

1. **a.** On recherchera les éléments propres de f à l'aide de sa représentation matricielle par les techniques usuelles.
   b. Il suffit d'interpréter les résultats de la question précédente matriciellement.
   c. On pensera à exprimer M_a à l'aide de J et de I_3, et se souvenir que $P\mathrm{I}_3P^{-1} = \mathrm{I}_3$.
   d. Le fait que 0 appartienne ou non à $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(J)$ apporte la réponse.
2. **a.** **i.** On doit montrer les égalités $M_aX = XM_a$ puis $JX = XJ$ où l'on remarque que $J = M_a - a\mathrm{I}_a$.
      ii. On montrera que pour $V \in E_\lambda(J)$, on a $XV \in E_\lambda(J)$ ce qui permettra de conclure.
      iii. On remarquera que la base diagonalisante pour J est la base diagonalisante pour X.

b. Δ^2 est une matrice diagonale aux coefficients diagonaux nécessairement positif. Ainsi, seules les valeurs de a telles que les coefficients diagonaux de D_a sont positifs permettront l'existence de X.