Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4602

On considère l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ \int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+a^2\right) + 2a\ln(a) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)$$

3. En déduire alors la valeur de l'intégrale I.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4602

1. On commencera par identifier les bornes en lesquelles I est impropre, puis on établiea la convergence de I à l'aide des théorèmes soit de comparaison, soit d'équivalence. On pourra aussi remarquer que $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = \ln\left(1+t^2\right) - 2\ln(t)$
2. On effectue l'intégration par parties proposée en remarquant que $\ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) = 1 \times \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$.
3. L'intégrale étant impropre en ses deux bornes, il est nécessaire de la couper en deux intégrales impropres en une seule borne, puis d'en calculer pour chacune la valeur.

EX. 2 | Réf. 4603

On considère l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. À l'aide du changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ déterminer la valeur de l'intégrale I.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4603

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4604

Dans cet exercice A désigne une matrice qui vérifie : $\begin{cases} A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R}) \\ \mathrm{tr}(A) = 8 \\ A^3 - 3A^2 + 2A = (0) \end{cases}$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4604

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1104

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que f et une fonction paire.

3. À l'aide d'un changement de variable judicieusement choisi, démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = K|x|$$

Non demandé : on pourrait montrer que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1104

1. Il s'agira d'étudier la convergence à x fixé de l'intégrale impropre $f(x)$, en commençant par identifier les bornes impropres, en mobilisant les théorèmes de comparaison, d'équivalence ou de convergence absolue.

2. Le domaine de définition de f étant symétrique par rapport à 0, il s'agira de s'assurer que $f(x) = f(-x)$, en utilisant notamment la parité de la fonction cosinus.

3. Le changement de variable $u = tx$ nous tend les bras ici !

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4240

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4240

1. Il y a deux bornes impropres à gérer, l'une avec le théorème d'équivalence, et l'autre avec le théorème d'encadrement.

2. Utiliser la forme canonique d'un polynôme de degré 2 puis deux changements de variables très simples pour retomber sur une $\arctan$

3. On fait une intégration par parties sur un intervalle de la forme $[a;b]$, mais il faut ensuite gérer les deux bornes impropres pour retomber sur l'intégrale proposée. Faire ensuite le changement de variable pour obtenir l'intégrale dont on admet la valeur.