À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4991] | 1| Tirage dans une urne | G2E 2015 Filère BCPST

Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$.
On vide l'urne en extrayant toutes les boules de l'urne une à une, au hasard et sans remise.

(1). Pour tout entier i de $[\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i^{e} tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i.

(2). En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsqu'on vide l'urne.

Pistes de réflexion

(1). On commence par remarquer que lorsque l'on vide l'urne complètement, on obtient une permutation des n éléments de $[\![1;n]\!]$. Puis on remarquera que X_i est une variable aléatoire de Bernoulli. Il suffira donc de déterminer $\mathbb{P}\left([X_i = 1]\right)$ pour obtenir la loi de X_i, l'équiprobabilité faisant le reste.

(2). On s'intéressera à la variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$, dont on commencera par donner une interprétation avant d'en calculer l'espérance à l'aide de la linéarité de l'espérance.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4992] | 2| Étude d'une suite récurrente | ENS 2017 Filière D2-Cachan

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{(x+1)^2} \end{array}\right.$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de f, puis étudier les variations de f sur ce dernier.

(2).(a). Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(b). Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(3). On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a). Exprimer v_n à l'aide de u_n seulement.

(b). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 < v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$.

(4). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a : $2(n+1) \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$

(5).(a). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

(b). Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). L'ensemble de définition ne pose pas de problème particulier, et le calcul de la dérivée non plus. On sera précautionneux pour ce qui concerne l'étude du signe de la dérivée, et on n'oubliera pas l'étude des limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

(2).(a). On pourra remarquer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; 1]$, ce qui sera bien utile pour exploiter l'encadrement $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ dans la partie hérédité de la récurrence.

(3).(a). On se contente de reporter l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de simplifier au mieux l'expression trouvée en remarquant que $u_n \neq 0$.

(b). C'est une simple conséquence de la majoration précédemment trouvée et de la relation entre v_n et u_n.

(4). On se contentera de sommer les inégalités précédentes.

(5).(a). On se souviendra que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[k; k+1]$ puis on utilisera la croissance de l'intégrale pour obtenir la une des majorations demandée, l'autre s'obtenant en faisant le même raisonnement sur $[k-1; k]$.

(b). On utilisera la question **(4)** et on s'intéressera au quotient $\dfrac{1}{u_n \times (n+1)}$ pour obtenir l'équivalent recherché.