Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1895

Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnues x, y et z réels strictements positifs ci-contre.

$$\mathcal{S} \quad : \quad \begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = 2 \\ x^2y^2z^5 & = 3 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1895

Puisque l'on suppose que $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, ce système est alors équivalent à :

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3\ln(x) + 2\ln(y) + 6\ln(z) = 0 \\ 4\ln(x) + 5\ln(y) + 12\ln(z) = \ln(2) \\ 2\ln(x) + 2\ln(y) + 5\ln(z) = \ln(3) \end{cases}$$

En posant $X = \ln(x)$, $Y = \ln(y)$ et $Z = \ln(z)$, on doit donc résoudre le système linéaire $\mathcal{S}'$: $\begin{cases} 3X + 2Y + 6Z = 0 \\ 4X + 5Y + 12Z = \ln(2) \\ 2X + 2Y + 5Z = \ln(3) \end{cases}$.

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & \ln(2) \\ 2 & 2 & 5 & \ln(3) \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \ln(3) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 4 & \ln(2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 28L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 42L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 42\ln(3) - 12\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{6}{7}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 18\ln(3) - 6\ln(2) \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & -7\ln(2) + 28\ln(3) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \ln(3) - \frac{2}{7}\ln(2) \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{7}L_2 \\ L_3 \leftarrow -7L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ 0 & 1 & 0 & -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ 0 & 0 & 1 & -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{array}\right)$$

et on en déduit : $\begin{cases} X & = & -2\ln(2) + 6\ln(3) \\ Y & = & -3\ln(2) + 12\ln(3) \\ Z & = & -7\ln(3) + 2\ln(2) \end{cases}$ puis que $\begin{cases} x = \mathrm{e}^X = \dfrac{3^6}{4} = \dfrac{729}{4} \\ y = \mathrm{e}^Y = \dfrac{3^{12}}{2^4} = \dfrac{531441}{8} \\ z = \mathrm{e}^Z = \dfrac{4}{3^7} = \dfrac{4}{2187} \end{cases}$.

EX. 2 | Réf. 2022

Soit $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]-1;1[$.
3. Donner alors une autre expression pour $f(x)$ sur $[-1;1]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2022

1. La fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc f ne sera définie que lorsque la quantité $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est définie, c'est à dire lorsque le quotient $\dfrac{1-x}{1+x}$ existe et lorsque ce dernier est positif.
   - Le quotient $\dfrac{1-x}{1+x}$ est défini si $1+x \neq 0$, c'est à dire pour $x \neq -1$.
   - Étude du signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

   Donc $\mathcal{D}_f = \,]-1;1]$.

2. f est de la forme $\arctan(u)$ qui se dérive en $u' \times \dfrac{1}{1+u^2}$, où u est la fonction $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. La fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est quant à elle de la forme $\sqrt{u}$ qui se dérive en $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Procédons donc par étape :
   - Dérivée de $g : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $]-1;1[$:
     Pour tout $x \in \,]-1;1[\,,\quad g'(x) = \dfrac{-1\times(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2}$ soit $g'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$.
   - Dérivée de $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ sur $]-1;1[$:
     Pour tout $x \in \,]-1;1[\,,\quad h'(x) = \dfrac{\dfrac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ ce qui donne après simplification $h'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}$.
   - Dérivée de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ sur $]-1;1[$:
     Pour tout $x \in \,]-1;1[\,,\quad f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}$, ce qui donne $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}$, puis $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1+x+1-x}{1+x}} = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{\dfrac{2}{1+x}}$ et finalement $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}$,
     c'est à dire $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
     Finalement, pour tout $x \in \,]-1;1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Sur l'intervalle $]-1;1[$, les fonctions f et $x \longmapsto \frac{1}{2}\arccos(x)$ ont la même dérivée, donc ces deux fonctions sont égales à une constante réelle près.
Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x) + K$ où $K \in \mathbb{R}$.
Or on a $f(0) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-0}{1+0}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ d'après l'expression initiale de f.
Par ailleurs, $f(0) = \frac{1}{2}\arccos(0) + K = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + K = \frac{\pi}{4} + K$.
Finalement on a $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + K$, et donc $K = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x)$.
On remarque que cette relation est vraie aussi pour $x = 1$ et $x = -1$ (faire le calcul), et ainsi pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(x)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2980

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. À l'aide du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$.

b. Justifier alors que $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.

a. Vérifier que : $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$.

b. En explicitant $\binom{n+1}{k+1}$ à l'aide de factorielles, montrer alors que : $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

4. Montrer alors à l'aide d'un changement d'indice que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}$ puis en déduire la valeur de la somme S_n.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2980

1. En posant $a = 1$ et $b = 1$, la formule du binôme permet d'écrire que : $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$ soit $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

2. a. La formule précédente appliquée pour $n+1$ donne : $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$.

b. On a : $\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}}_{=2^{n+1}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}}_{} + \sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}.$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}$$

On en déduit alors que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1}.$

Finalement, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1 - (n+1)$ ce qui amène bien à : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$.

a. On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\binom{k}{k} &= \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\end{aligned}$$

b. Par définition :
$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-k+1))!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\end{aligned}$$

Par suite, on a directement :
$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

4. D'après la **question (3)(b)**, on peut écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$ ou encore : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}.$

On effectue le changement d'indice $j = k+1$ dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}$, ce qui permet d'écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=2}^{n+1}\binom{n+1}{j}.$

L'indice de sommation étant « muet », on en déduit alors que : $\displaystyle\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}.$

Or d'après la question **(2)(b)**, on sait que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2.$

On en conclut ainsi que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - n - 2\right).$