Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2036

Soient k, p et n trois entiers vérifiant $0 \leq k \leq p \leq n$.

1. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

2. En déduire une expression simplifiée de $S = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2036

1. Pour k, p, n entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{p!}{k!(p-k)!} \\
&= \binom{p}{k}\binom{n}{p}
\end{aligned}$$

2. Ainsi, $S = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$ soit $S = 2^p\binom{n}{p}$.

EX. 2 | Réf. 2022

Soit $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-1; 1\right[$.

3. Donner alors une autre expression pour $f(x)$ sur $[-1; 1]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2022

1. La fonction $x \longmapsto \arctan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc f ne sera définie que lorsque la quantité $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ est définie, c'est à dire lorsque le quotient $\frac{1-x}{1+x}$ existe et lorsque ce dernier est positif.

- Le quotient $\frac{1-x}{1+x}$ est défini si $1 + x \neq 0$, c'est à dire pour $x \neq -1$.
- Étude du signe de $\frac{1-x}{1+x}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{1-x}{1+x}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{D}_f =]-1;1]$.

2. f est de la forme $\arctan(u)$ qui se dérive en $u' \times \dfrac{1}{1+u^2}$, où u est la fonction $u(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$. La fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ est quant à elle de la forme $\sqrt{u}$ qui se dérive en $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Procédons donc par étape :

- Dérivée de $g : x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ sur $]-1;1[$:
  Pour tout $x \in]-1;1[,\quad g'(x) = \dfrac{-1\times(1+x)-(1-x)\times 1}{(1+x)^2}$ soit $g'(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^2}$.
- Dérivée de $h : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ sur $]-1;1[$:
  Pour tout $x \in]-1;1[,\quad h'(x) = \dfrac{\dfrac{-2}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}$ ce qui donne après simplification $h'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}$.
- Dérivée de $f : x \longmapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ sur $]-1;1[$:
  Pour tout $x \in]-1;1[,\quad f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{1+\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^2}$, ce qui donne $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}$, puis $f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{\dfrac{1+x+1-x}{1+x}} = \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}}}{\dfrac{2}{1+x}}$ et finalement $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}$,
  c'est à dire $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
  Finalement, pour tout $x \in]-1;1[$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. Sur l'intervalle $]-1;1[$, les fonctions f et $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\arccos(x)$ ont la même dérivée, donc ces deux fonctions sont égales à une constante réelle près.
Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x) + K$ où $K \in \mathbb{R}$.
Or on a $f(0) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-0}{1+0}}\right) = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ d'après l'expression initiale de f.
Par ailleurs, $f(0) = \dfrac{1}{2}\arccos(0) + K = \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} + K = \dfrac{\pi}{4} + K$.
Finalement on a $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + K$, et donc $K = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x)$.
On remarque que cette relation est vraie aussi pour $x=1$ et $x=-1$ (faire le calcul), et ainsi pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\arccos(x)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2070

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad xy' + y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Mettre sous forme résolue puis résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $I =]0;+\infty[$.
2. Déterminer ensuite la solution f de (E) sur I telle que $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2070

1. Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $\quad (E) \quad \Leftrightarrow \quad y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x\,(1+x^2)}$.
   - **Résolution de l'équation homogène (E_0) associée à (E) sur $]0;+\infty[$:** $\quad (E_0)$: $\quad y' + \dfrac{1}{x}y = 0$.
     Une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est $x \longmapsto \ln(x)$.
     Par suite, les solutions sur $]0;+\infty[$ de (E_0) sont les fonctions $y : x \longmapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)}$ où C est une constante réelle, c'est à dire : $\quad y : x \longmapsto \dfrac{C}{x}$.
   - **Recherche d'une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$:**
     On utilise la méthode de la variation de la constante en recherchant une solution particulière y_0 de (E) sur $]0;+\infty[$ sous la forme $y_0 = \dfrac{C(x)}{x}$ où C est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$.
     Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\quad y_0'(x) = \dfrac{C'(x) \times x - C(x)}{x^2}$, et par suite :

$$\begin{array}{lcl}
y_0 \text{ est une solution de (E) sur }]0;+\infty[& \Leftrightarrow & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad y_0'(x) + \dfrac{1}{x}y_0(x) = \dfrac{1}{x\,(1+x^2)} \\
 & \Leftrightarrow & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \dfrac{C'(x)\times x - C(x)}{x^2} + \dfrac{1}{x} \times \dfrac{C(x)}{x^2} = \dfrac{1}{x\,(x^2+1)} \\
 & \Leftrightarrow & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \dfrac{C'(x)}{x} = \dfrac{1}{x\,(x^2+1)} \\
 & \underset{\Leftrightarrow}{\text{et comme } x \neq 0} & \forall x \in]0;+\infty[\,, \quad C'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}
\end{array}$$

     Ainsi, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\quad C(x) = \arctan(x)$ (à une constante additive près, que l'on prend égale à 0 puisque l'on cherche simplement une primitive de C').
     Finalement, la fonction y_0 définie par $\quad y_0 : \left|\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan(x)}{x} \end{array}\right.$ est une solution particulière de (E) sur $]0;+\infty[$.
   - **Solution de (E) sur $]0;+\infty[$:**
     Les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont ainsi les fonctions :

$$y : x \longmapsto \frac{C}{x} + \frac{\arctan(x)}{x} \quad \text{où } C \text{ est une constante réelle}$$

2. Puisque f est solution de (E) sur $]0;+\infty[$, il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
   Or on veut que $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi, on a :

$$f(1) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \text{ puisque c'est ce que l'on veut} \\ C + \dfrac{\pi}{4} \text{ d'après l'expression de } f \end{array}\right.$$

   Ainsi, $\dfrac{\pi}{2} = C + \dfrac{\pi}{4}$ et finalement $C = \dfrac{\pi}{4}$.
   Par conséquent, f est la fonction définie par : $\quad f : \left|\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\pi}{4x} + \dfrac{\arctan(x)}{x} \end{array}\right.$.