Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2304

Résoudre à l'aide de sa représentation matricielle, le système : $\mathcal{S} : \begin{cases} x-2y+3z-2t=-12 \\ x-y+z-t=-5 \\ 2x+3y-z+2t=15 \\ 4x+y+z-2t=-1 \end{cases}$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2304

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 15 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 6 & 39 \\ 0 & 9 & -11 & 6 & 47 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 9L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & -16 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

Là encore, nous n'avons pas tout à fait la matrice échelonnée. Cependant, nous voyons que le nombre de pivot est 4, et donc le rang sera de 4. Il y aura ainsi une unique solution, puisqu'il s'agit d'un système à 4 équations et 4 inconnues.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 14 & 0-14 & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 14L_2 + 4L_3 \\ L_1 \leftarrow 14L_1 - 3L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & -28 & 0 & 0 & -42 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 14 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 28 & 0 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{14}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{28}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{14}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \text{ qui permet d'avoir la matrice échelonnée réduite } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la solution du système $\mathcal{S}$ est : $\boxed{(1,2,-1,3)}$

EX. 2 | Réf. 2076

On se propose dans cet exercice de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier par le calcul que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad 1+\dfrac{2}{k(k+3)} = \dfrac{k^2+3k+2}{k(k+3)}$.

2. Factoriser le polynôme k^2+3k+2.

3. Exprimer sous forme d'une somme $\ln\left(1+\dfrac{2}{k(k+3)}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On pourra utiliser la factorisation du polynôme k^2+3k+2.

4. Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.

On pourra faire apparaître un téléscopage de termes.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2076

1. On réduit au même dénominateur l'expression $1+\dfrac{2}{k(k+3)}$ pour se ramener à l'expression proposée. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} 1+\frac{2}{k(k+3)} &= \frac{k(k+3)+2}{k(k+3)} \\ &= \frac{k^2+3k+2}{k(k+3)} \end{aligned}$$

2. Le polynôme k^2+3k+2 en k a pour discriminant $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 2 = 1$ donc possède deux racines $k_1=-1$ et $k_2=-2$. Par suite, on en déduit que : $k^2+3k+2=(k+1)(k+2)$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \ln\left(\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}\right) \\ &= \ln(k+1)+\ln(k+2)-\ln(k)-\ln(k+3) \end{aligned}$$

4. On en déduit ainsi que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)+\ln(k+2)-\ln(k)-\ln(k+3)\right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ j=k+1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+2)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ \ell=k+2}} - \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln(k+3)}_{\substack{\textbf{Changement d'indice}\\ h=k+3}} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1}\ln(j)+\sum_{\ell=3}^{n+2}\ln(\ell)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{h=4}^{n+3}\ln(h) \\ &\quad \text{et on redonne le même nom aux indices de sommation} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k)+\sum_{k=3}^{n+2}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=4}^{n+3}\ln(k) \\ &\quad \text{la plage commune de sommation est l'intervalle d'entiers } [\![4;n]\!] \\ &= \left(\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)\right)+\left(\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)\right) \\ &\quad -\left(\ln(1)+\ln(2)+\ln(3)+\sum_{k=4}^{n}\ln(k)\right)-\left(\sum_{k=4}^{n}\ln(k)+\ln(n+1)+\ln(n+2)+\ln(n+3)\right) \\ &= \ln(2)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(3)+\ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(1)-\ln(2)-\ln 3)-\ln(n+2) \\ &= \ln(3)+\ln(n+1)-\ln(n+3) \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2303

On se propose dans cet exercice de donner une autre expression de $f(x)=\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}}\right)$ où $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que : $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right],\quad \dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$

2. En déduire une expression de $f(x)$ en fonction seulement de $\tan$ et $\arctan$.

3. Justifier alors que : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} \text{ si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4} \text{ si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2303

1. En remarquant que $\dfrac{\pi}{2}-x = 2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$ et en utilisant la relation : $\forall a \in \mathbb{R},\quad \cos(2a) = 2\cos^2(a)-1$ qui donnera ici :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right],\quad f(x) &= \frac{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\\ &= \tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

2. Puisque pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sin(a) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$, il vient alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right],\quad f(x) &= \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\right)\\ &= \arctan\left(\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \arctan\left(\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|\right)\end{aligned}$$

3. Il s'agit donc d'étudier le signe de $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)$ pour $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Ainsi :

$$x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \in \left[0+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[,\ k \in \mathbb{Z}$$

Or : $0+k\pi \leq \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} \leq -\dfrac{\pi}{2}+k\pi \quad\Leftrightarrow\quad -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}+2k\pi.$

On en déduit ainsi que : $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right) \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right].$

Par suite, il vient que : $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right) \text{ si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \arctan\left(-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)\right) \end{cases}$, pour obtenir $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2} \text{ si } x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4} \text{ si } x \in \left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$