Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1375

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ sachant que A admet pour vecteurs propres les trois matrices colonnes V_1, V_2 et V_3 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1375

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4667

On considère la matrice carré réelle d'ordre trois $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout réel a, la matrice $M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. **a.** Déterminer une matrice D diagonale et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $J = PDP^{-1}$.
   b. En déduire, après avoir exprimé M_a en fonction de J, que, pour tout réel a, il existe une matrice diagonale D_a que l'on exprimera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
   c. Quel est l'ensemble des réels a tels qe M_a soit inversible ?
2. On cherche à présent à déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.
   a. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = M_a$.
      i. Montrer que X commute avec M_a puis que X commute avec J.
      ii. Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de J est vecteur propre de la matrice X.
      iii. Établir qu'il existe une matrice diagonale $\Delta \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer que $\Delta^2 = D_a$.
   b. Conclure en donnant l'ensemble auquel doit appartenir le réel a pour que la matrice X vérifiant $X^2 = M_a$ existe.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4667

1. **a.** **Valeurs propres de J :** on sait que : $(\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(J)) \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_J(\lambda) = 0)$.

On a :
$$\begin{aligned}
\chi_J(A) &= \det(\lambda \mathrm{I}_3 - J) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_1}{=} (-1)^{1+1} \times \lambda \times \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda\left((\lambda+1)\times\lambda - (-1)(-2)\right) \\
&= \lambda(\lambda+\lambda-2) \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(J) = \{-2, 1, 0\}$.

Recherche des sous-espaces propres de J : puisque $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que J possède exactement 3 valeurs propres distinctes, par théorème, J est diagonalisable et en plus, chaque sous-espace propre est une droite vectorielle, donc de dimension 1.

Recherche d'une base de $E_0(J)$: le première colonne de J étant nulle, on en déduit que $J\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ce qui donne que $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in E_0(J)$ et donc que $E_0(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

Recherche d'une base de $E_1(J)$: on remarque que :

$$\begin{aligned} J\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} \in E_1(J)$ et par suite $E_1(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Recherche d'une base de $E_{-2}(J)$: on sait que :

$$\begin{aligned} \left(V = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in E_{-2}(J)\right) &\Leftrightarrow \left(JV = -2V\right) \\ &\Leftrightarrow \left((J + 2\mathrm{I}_3)\, V = (0)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c}(v_1, v_2, v_3) \text{ est soluti} \\ \text{de représentation matri}\end{array}\right. \end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&1&0\\0&1&2&0\\0&1&2&0\end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c}2&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-3&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\0&0\end{array}\right.$$

On en déduit ainsi que :

$$\begin{aligned} \left(V = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \in E_{-2}(J)\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \dfrac{3}{2}v_3 \\ v_2 = -2v_3 \end{cases}, \ x_3 \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(V \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}\right)\right) \end{aligned}$$

Par suite, on en déduit que $E_{-2}(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix}\right)$.

Diagonalisation de J : en posant $P = \begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&-4\\0&1&2\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, et $D = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$, on a donc $A = PDP^{-1}$.

b. On a clairement que :

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R},\ M_a &= \begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&2&1\\0&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix} \\ &= a\mathrm{I}_3 + J \\ &= aPP^{-1} + PDP^{-1} \\ &= aP\mathrm{I}_3P^{-1} + PDP^{-1} \\ &= P\,(a\mathrm{I}_3 + D)\,P^{-1} \\ &= \underbrace{P\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a+1&0\\0&0&a-2\end{pmatrix}}_{=D_a} P^{-1} \end{aligned}$$

c. Puisque M_a est semblable à la matrice diagonale D_a, on en déduit que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M_a) = \{a, a+1, a-2\}$.
On sait que : $\left(M_a \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\right) \Leftrightarrow \left(0 \notin \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(M_a)\right)$.
On en déduit donc que : $\left(M_a \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})\right) \Leftrightarrow \left(a \notin \{0, -1, 2\}\right)$.

2. a. i. On a :
$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R},\ M_a X &= X^2 \times X\\ &= X \times X^2\\ &= X \times M_a\end{aligned}$$
et aussi :
$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R},\ JX &= (M_a - a\mathrm{I}_3)\,X\\ &= M_a X - a\mathrm{I}_3 X\\ &= X M_a - aX\mathrm{I}_3\\ &= X\,(M_a - a\mathrm{I}_3)\\ &= XJ\end{aligned}$$
Ainsi, X commute avec M_a et J.

ii. Soit V un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ.
On a donc $JV = \lambda V$. Par suite $XJV = \lambda XV$ et comme X et J commute, il vient que $J\,(XV) = \lambda\,(XV)$. Donc XV est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ. Comme chaque sous-espace propre de J est de dimension 1, on en déduti que $E\lambda(J) = \mathrm{Vect}\ (V)$ et par suite que XV est colinéaire à V, c'est à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $XV = \alpha V$. Ainsi, V est bien un vecteur propre de X.

iii. Les trois vecteurs propres de J précédemment trouvés sont donc des vecteurs propres de X. Ces trois vecteurs formant une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ puisque base de vecteurs propres pour J, ils forment alors une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$formée de vecteurs propres de X, qui est ainsi diagonalisable. La matrice P donnant la base diagonalisante pour J est alors aussi la matrice de passage donnant la base diagonalisante de X, et il existe ainsi une matrice diagonale Δ telle que $X = P\Delta P^{-1}$.
Par ailleurs, on en déduit que :
$$\begin{aligned}M_a &= X^2\\ &= P\Delta \underbrace{P^{-1} \times P}_{=\mathrm{I}_3} \Delta P^{-1}\\ &= P\Delta^2 P^{-1}\end{aligned}$$
Par suite, on en déduit que $PD_aP^{-1} = P\Delta^2P^{-1}$ et donc en multipliant à gauche par P^{-1} puis à droite par P, il vient que $\Delta^2 = M_a$.

b. En écrivant $\Delta = \begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & y & 0\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$, un calcul direct donne que $\Delta^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0\\ 0 & y^2 & 0\\ 0 & 0 & z^2\end{pmatrix}$ et les termes diagonaux de cette matrice sont alors tous positifs. Par suite l'égalité $\Delta^2 = D_a$ et l'identification coefficients à coefficients conduit aux relations : $\begin{cases} a \geq 0\\ a+1 \geq 0\\ a-2 \geq 0\end{cases}$
Par conséquent, on doit avoir nécessairement $a \in [0; +\infty[$ pour que l'équation matricielle $X = M_a^2$ admette une solution.