Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4602

On considère l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*,\ \int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+a^2\right) + 2a\ln(a) + 2\mathrm{arctan}\,(b) - 2\mathrm{arctan}\,(a)$$

3. En déduire alors la valeur de l'intégrale I.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4602

1. La fonction $f : t \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc l'intégrale I est impropre en ses deux bornes.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: puisque $\begin{cases} \forall t\in[1;+\infty[\,, f(t)\geq 0 \\ f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est une intégrale de Rieman convergente puisque } 2>1 \end{cases}$

on en déduit d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et convergente.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$: on a : $\forall t\in\,]0;1]\,,\ f(t) = \ln\left(1+t^2\right) - 2\ln(t)$.

D'où : $\forall t\in\,]0;1]\,,\ \dfrac{f(t)}{-2\ln(t)} = 1 - \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+t^2\right)}{2\ln(t)}}_{\underset{t\to0}{\longrightarrow}0}$ d'où $\dfrac{f(t)}{-2\ln(t)} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, on a : $f(t) \underset{t\to0}{\sim} -2\ln(t)$

Puisque : $\begin{cases} \forall t\in\,]0;1]\,, f(t)\geq 0 \\ f(t) \underset{t\to0}{\sim} -2\ln(t) \\ \displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t \text{ est une intégrale de référence convergente} \end{cases}$, d'après le théorème d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Ainsi, puisque $\displaystyle\int_0^1 d(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, par définition $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et convergente, et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. En effectuant l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = \ln\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} - \dfrac{2}{t} \\ v(t) = t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = 1 \end{array}$$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b t\times\left(\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2}{t}\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{2t^2}{t^2+1}-2\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{2t^2+2-2}{t^2+1}-2\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'où : $$\begin{aligned}
\int_a^b \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t &= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \left(2-\frac{2}{1+t^2}-2\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\left[\arctan(t)\right]_a^b\\
&= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)\\
&= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\left(\ln\left(1+a^2\right) - 2\ln(a)\right) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)\\
&= b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - a\ln\left(1+a^2\right) + 2a\ln(a) + 2\arctan(b) - 2\arctan(a)
\end{aligned}$$

3. **Calcul de $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$:** par définition : $\int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

Or d'après ce qui précède : $\int_a^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1\times\ln\left(1+\frac{1}{1^2}\right) - \underbrace{a\ln\left(1+a^2\right)}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow}0} + 2\underbrace{a\ln(a)}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow}0} + 2\arctan(1) - 2\underbrace{\arctan(a)}_{\underset{a\to 0}{\longrightarrow}0} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} \ln(2) + 2\arctan(1)$

et donc $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$

Calcul de $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: par définition : $\int_1^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

Or d'après ce qui précède : $\int_1^b f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{b\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right)}_{\underset{b\to+\infty}{\sim}\frac{1}{b^2}}}_{\underset{b\to+\infty}{\longrightarrow}0} - 1\times\ln\left(1+1^2\right) + 2\times 1\times\ln(1) + 2\underbrace{\arctan(b)}_{\underset{b\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\pi}{2}} - 2\arctan(1) \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2) + \pi - \frac{\pi}{2}$

et donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \ln(2)$

On en déduit donc que : $$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\pi}{2} + \ln(2) + \frac{\pi}{2} - \ln(2)\\
&= \pi
\end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 4603

On considère l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x}$ déterminer la valeur de l'intégrale I.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4603

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 4604

Dans cet exercice A désigne une matrice qui vérifie : $\begin{cases} A \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{R}) \\ \mathrm{tr}(A) = 8 \\ A^3 - 3A^2 + 2A = (0) \end{cases}$

Déterminer le polynôme caractéristique de A.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4604

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 1104

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f et une fonction paire.
3. À l'aide d'un changement de variable judicieusement choisi, démontrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = K|x|$$

Non demandé : on pourrait montrer que $K = \dfrac{\pi}{2}$.

EX. 4 | Éléments de correction | Réf. 1104

1. L'expression $f(x)$ n'a de sens que si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. La fonction $g : t \longmapsto \dfrac{1-\cos(tx)}{t^2}$ est continue sur $]0;+\infty[$.

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en ses deux bornes 0 et $+\infty$.

Cas où $x = 0$: dans ce cas, il est clair que g est la fonction nulle, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On supposera donc dans la suite que $x \neq 0$.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$: puisque l'on a $g(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^2$, on en déduit que la fonction g est prolongeable par continuité en 0, et par suite, $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale faussement impropre en 0.

Étude de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$: on a : $\forall t \in [1;+\infty[,\ \left|\dfrac{1-\cos(tx)}{t^2}\right| \leq \dfrac{2}{t^2}$

Comme on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Rieman convergente, puisque $2 > 1$, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |g(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente, c'est à dire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, et par théorème est convergente.

Puisque $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Ainsi, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente quelle que soit la valeur de x.

2. L'ensemble de définition de f est clairement symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t\times(-x))}{t^2} \\ &\underset{\cos \text{ est pair}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= f(x)\end{aligned}$$

et par suite f est une fonction paire.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable $u = tx$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty]$ et strictement croissant sur $[0;+\infty[$ à valeurs dans $[0;+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, les deux intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\left(\frac{u}{x}\right)^2} \times x\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, dont convergentes ici, et égales.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{\left(\frac{u}{x}\right)^2} \times x\,\mathrm{d}t = x \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u}_{=f(1)}$.

On en déduit donc que : $\begin{aligned}\forall x > 0,\ f(x) &= f(1)\times x \\ &= f(1)\times |x|\end{aligned}$.

Puisque f est paire, il vient que : $\begin{aligned}\forall x < 0,\ f(x) &= f(1)\times(-x) \\ &= f(1)\times|x|\end{aligned}$

Il est immédiat que : $\begin{aligned}f(0) &= f(1)\times 0 \\ &= f(1)\times|0|\end{aligned}$

Ainsi, en posant $K = f(1)$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = K\times|x|$.

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 1104

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4240

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.

2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.

3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 4240

1. En notant $f : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$, f est continue sur $]0;+\infty[$.

L'intégrale I est donc impropre en les bornes 0 et $+\infty$.

Étude en 0 : on sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Rieman convergente.

Ainsi, puisque $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[\,, f(x) \geq 0 \\ f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \forall \alpha > 0,\ \displaystyle\int_0^{\alpha} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente} \end{cases}$, d'après le théorème d'équivalence, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Étude en $+\infty$: on sait que : $\forall x > 0,\ 0 < \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$

Il vient alors que : $\forall x > 0,\ 0 < f(x) < \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Or pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ est un intégrale convergente.

Ainsi, puisque $\begin{cases} \forall x \in]0;+\infty[\,, 0 < f(x) \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \\ \forall \alpha > 0,\ \displaystyle\int_0^{\alpha} \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente} \end{cases}$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par suite, on en déduit que l'intégrale I est une intégrale convergente.

2. En notant $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$, la fonction g est continue sur $[0;+\infty[$.
Ainsi, l'intégrale J est impropre en la borne 0.
En remarquant que $\dfrac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, par un raisonnement semblable à celui de l'étude en la borne $+\infty$ de l'intégrale I, on montre que J est une intégrale convergente.
Soit alors $X > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\int_0^X \frac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^X \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{u = x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\overset{\text{CDV}}{=}} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X + \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u^2 + \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X + \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 + \left(u\sqrt{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\
&\underset{v = u\sqrt{2}}{\overset{\text{CDV}}{=}} \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{1}{1 + v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= 2\sqrt{2}\left[\arctan(v)\right]_1^{\sqrt{2}\left(X + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= 2\sqrt{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \arctan(1)\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\left(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Or puisque $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

En conclusion, l'intégrale J est une intégrale convergente, et on a $J = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. L'intégration par parties en posant $\begin{array}{lcl} u(x) = \arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \end{array}$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ donne que :

$$\int_a^b \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2\arctan(x)}{\sqrt{x}}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

Par suite, puisque $-\dfrac{2\arctan(b)}{\sqrt{b}} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ étant donné que la fonction $\arctan$ est bornée, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

De même en utilisant le fait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient que $-\dfrac{2\arctan(a)}{\sqrt{a}} \underset{a\to 0}{\longrightarrow} 0$ et donc on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Par suite, il vient que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2-1)}\,\mathrm{d}x$

Par ailleurs, en effectuant le changement de variables $u = \sqrt{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $]0;+\infty[$ dans l'intégrale $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$, d'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, il vient que $\displaystyle 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}$ sont de même nature et égale en cas de convergence, et par suite on en déduit la valeur de I.