Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4240

L'objet de cet exercice consiste en l'étude de la convergence et du calcul de l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\,\mathrm{d}x$ est convergente et calculer sa valeur.
3. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

   À l'aide d'une intégration par parties que $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et en déduire la valeur de I àl'aide du changement de variable $u = \sqrt{x}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4240

1. En notant $f : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$, f est continue sur $]0;+\infty[$.

   L'intégrale I est donc impropre en les bornes 0 et $+\infty$.

   Étude en 0 : on sait que $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, il vient que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale de Rieman convergente.

   Ainsi, puisque $\begin{cases} \forall x \in\,]0;+\infty[\,, f(x) \geq 0 \\ f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \forall \alpha > 0, \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente} \end{cases}$, d'après le théorème d'équivalence, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   Étude en $+\infty$: on sait que : $\forall x > 0,\ 0 < \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$

   Il vient alors que : $\forall x > 0,\ 0 < f(x) < \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

   Or pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ est un intégrale convergente.

   Ainsi, puisque $\begin{cases} \forall x \in\,]0;+\infty[\,, 0 < f(x)\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \\ \forall \alpha > 0, \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente} \end{cases}$, d'après le théorème de comparaison, on en déduit que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

   Par suite, on en déduit que l'intégrale I est une intégrale convergente.

2. En notant $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}$, la fonction g est continue sur $[0;+\infty[$.

   Ainsi, l'intégrale J est impropre en la borne 0.

   En remarquant que $\dfrac{1}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, par un raisonnement semblable à celui de l'étude en la borne $+\infty$ de l'intégrale I, on montre que J est une intégrale convergente.

   Soit alors $X > 0$. On a :

$$
\begin{aligned}
\int_0^X \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^X \frac{1}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\text{CDV}\\ u=x+\frac{\sqrt{2}}{2}}}{=} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{u^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{X+\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1+\left(u\sqrt{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\
&\underset{\substack{\text{CDV}\\ v=u\sqrt{2}}}{=} \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v \\
&= 2\sqrt{2}\,[\arctan(v)]_1^{\sqrt{2}\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= 2\sqrt{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\left(X+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-\arctan(1)\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\left(X+\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

Or puisque $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $\int_0^X \frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

En conclusion, l'intégrale J est une intégrale convergente, et on a $J=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

3. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$. L'intégration par parties en posant $\begin{array}{lcl} u(x)=\arctan(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x)=\frac{1}{1+x^2} \\ v(x)=-\frac{2}{\sqrt{x}} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\end{array}$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ donne que :

$$\int_a^b \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2\arctan(x)}{\sqrt{x}}\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

Par suite, puisque $-\frac{2\arctan(b)}{\sqrt{b}} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ étant donné que la fonction $\arctan$ est bornée, on en déduit que pour tout $\alpha>0$, l'intégrale $\int_\alpha^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_\alpha^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

De même en utilisant le fait que $\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, il vient que $-\frac{2\arctan(a)}{\sqrt{a}} \underset{a\to0}{\longrightarrow} 0$ et donc on en déduit que pour tout $\alpha>0$, l'intégrale $\int_0^\alpha \frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

Par suite, il vient que les deux intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2-1)}\,\mathrm{d}x$

Par ailleurs, en effectuant le changement de variables $u=\sqrt{x}$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant sur $]0;+\infty[$ dans l'intégrale $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$, d'après le théorème de changement de variables pour les intégrales impropres, il vient que $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\,(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}$ sont de même nature et égale en cas de convergence, et par suite on en déduit la valeur de I.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4239

L'objet de cet exercice est, pour une matrice $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée, de déterminer toutes les matrices R de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2=M$. Une telle matrice sera appelée racine carrée de la matrice M et on la notera $\mathrm{rac}(M)$.

Dans tout cet exercice on considère $A=\begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et D matrice diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. *On conviendra que les éléments diagonaux de D seront écrits par ordre croissant en partant du coefficient de la 1e ligne et 1ecolonne.*
2. Montrer l'équivalence suivante : (R est une racine carrée de A) $\Leftrightarrow$ ($S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D)
3. On suppose dans cette question que S désigne une racine carrée de D.
   a. Montrer que $DS = SD$.
   b. Justifier que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(D) = \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.
   c. Montrer alors que :
      i. $\forall X \in E_0(D),\ SX \in E_0(D)$
      ii. $\forall X \in E_1(D),\ SX \in E_1(D)$
      iii. $\forall X \in E_{16}(D),\ SX \in E_{16}(D)$
   d. En déduire que la matrice S est une matrice diagonale [a].
   e. On note alors $S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$. Que valent s_1^2, s_2^2 et s_3^2 ?
4. Écrire alors toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées la matrice A admet-elle ?

a. on pourra admettre la question. Non pas qu'elle soit difficile mais c'est qu'elle est pas évidente à justifier

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 4239

1. **Recherche des valeurs propres de A :** On sait que : (λ est valeur propre réelle de A) $\Leftrightarrow$ ($\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = 0$)

On a par ailleurs que :
$$\begin{aligned}
\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-11 & 5 & -5 \\ 5 & \lambda-3 & 3 \\ -5 & 3 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} \lambda-11 & 5 & -5 \\ 5 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda \begin{vmatrix} \lambda-11 & 5 & -5 \\ 5 & \lambda-3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_1 \leftarrow L_1+5L_3}}{=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda-11 & 10 & 0 \\ 5 & \lambda-6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_3}{=} \lambda \begin{vmatrix} \lambda-11 & 10 \\ 5 & \lambda-6 \end{vmatrix} \\
&= \lambda\left[(\lambda-11)(\lambda-6) - 50\right] \\
&= \lambda\left[\lambda - 2 - 17\lambda + 16\right) \\
&= \lambda(\lambda-1)(\lambda-16)
\end{aligned}$$

et par suite on a $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1, 16\}$.
Par conséquent $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ possède trois valeurs propres distinctes. Elle est donc par théorème diagonalisable.

Recherche des sous-espaces propres de A : en notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ il vient que :

Recherche de $E_0(A)$: $(X \in E_0(A)) \Leftrightarrow (AX = 0.X)$ $\Leftrightarrow$ ((x_1, x_2, x_3) est solution du système de représentation matricielle $(A - 0.\mathrm{I}_3|0)$)

La résolution par échelonnement de ce système :

$$(A - 0.\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & -5 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 11 & -5 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 5L_2+11L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_1}}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -22 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{22}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \text{puis} L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donne que : $(X \in E_0(A)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Il vient alors que $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Recherche de $E_1(A)$: $(X \in E_1(A)) \Leftrightarrow (AX = 1.X)$

$\Leftrightarrow$ ((x_1, x_2, x_3) est solution du système de représentation matricielle $(A - 1.\mathrm{I}_3|0)$)

La résolution par échelonnement de ce système :

$$(A - 1.\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -5 & 5 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & -3 & 0 \\ 10 & -5 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ \text{puis} L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donne que : $(X \in E_1(A)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Il vient alors que $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Recherche de $E_{16}(A)$: $(X \in E_{16}(A)) \Leftrightarrow (AX = 16.X)$

$\Leftrightarrow$ ((x_1, x_2, x_3) est solution du système de représentation matricielle $(A - 16.\mathrm{I}_3|0)$)

La résolution par échelonnement de ce système :

$$(A - 16.\mathrm{I}_3|0) \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -5 & 5 & 0 \\ -5 & -13 & -3 & 0 \\ 5 & -3 & -13 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \text{puis } L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donne que : $(X \in E_{16}(A)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}, x_3 \in \mathbb{R}$

Il vient alors que $E_{16}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, la matrice A est diagonalisable, et en posant $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1}$.

2. En posant $S = P^{-1}RP$, il vient que :
$$\begin{aligned}\left(R^2 = A\right) &\Leftrightarrow \left(R^2 = PDP^{-1}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(P^{-1}R^2P = D\right)\\ &\Leftrightarrow \left(P^{-1}R\left(PP^{-1}\right)RP = D\right)\\ &\Leftrightarrow \left(P^{-1}RPP^{-1}RP = D\right)\\ &\Leftrightarrow \left(S^2 = D\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne l'équivalence souhaitée.

3. **a.** On a directement que :
$$\begin{aligned}SD &\underset{S^2=D}{=} SS \times S^2\\ &= S^2 \times S\\ &= DS\end{aligned}$$

b. D étant une matrice diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux, et il vient directement que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(D) = \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

c. **i.** Il est immédiat que $E_0(D) = \mathrm{Vect}\ (X_0)$ où $X_0 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul avec $DX_0 = 0.X_0$
Soit alors $X \in E_0(D)$. Il existe donc α_0 tel que $X = \alpha_0 X_0$.
Par suite $SX = \alpha_0 SX_0$. D'où $DSX = \alpha_0 DSX_0$. Or $SD = DS$ donnera que $SDX = \alpha_0 SDX_0$ et comme $DX_0 = 0X_0$, il vient que $SDX = 0$ et donc que $DSX = 0$. Par suite $SX \in E_0(D)$.

ii. Il est immédiat que $E_1(D) = \mathrm{Vect}\ (X_1)$ où $X_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul avec $DX_1 = 1.X_1$
Soit alors $X \in E_1(D)$. Il existe donc α_1 tel que $X = \alpha_1 X_1$
Par suite $SX = \alpha_1 SX_1$. D'où $DSX = \alpha_1 DSX_1$. Or $SD = DS$ donnera que $SDX = \alpha_1 SDX_1$ et comme $DX_1 = 1X_1$, il vient que $SDX = \alpha_1 X_1$ et donc que $DSX = \alpha_1.X_1$ c'est à dire $DSX = 1.X$. Par suite $SX \in E_1(D)$.

iii. Il est immédiat que $E_{16}(D) = \mathrm{Vect}\ (X_{16}1)$ où $X_{16} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul avec $DX_{16} = 16.X_{16}$
Soit alors $X \in E_{16}(D)$. Il existe donc α_{16} tel que $X = \alpha_{16} X_{16}$
Par suite $SX = \alpha_{16} SX_{16}$. D'où $DSX = \alpha_{16} DSX_{16}$. Or $SD = DS$ donnera que $SDX = \alpha_{16} SDX_{16}$ et comme $DX_{16} = 16X_{16}$, il vient que $SDX = \alpha_{16} X_{16}$ et donc que $DSX = \alpha_{16}.X_{16}$ c'est à dire $DSX = 16.X$. Par suite $SX \in E_{16}(D)$.

d. Les trois vecteurs X_0, X_1 et X_{16} définissent donc trois droites vectorielles stables par produit matriciel par S.
En notant s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice S et x_0, x_1, x_{16} les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont la représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont X_0, X_1 et X_{16}, puisqu'il s'agit de vecteurs propres, on sait que (x_0, x_1, x_{16}) forme une base de $\mathbb{R}^3$, dans laquelle la matrice de s est alors diagonale puisque chaque droite vectorielle engendrée par x_0, x_1 et x_{16} est stable par s. Ainsi, S est diagonale.

e. Puisque $S^2 = D$ et que $S^2 = \begin{pmatrix} s_1^2 & 0 & 0\\ 0 & s_2^2 & 0\\ 0 & 0 & s_3^2\end{pmatrix}$ par identification, il vient que $s_1^2 = 0$, $s_2^2 = 1$ et $s_3^2 = 16$.

4. On en déduit donc que toutes les racines carrées de D sont les matrices de la forme $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \pm 1 & 0\\ 0 & 0 & \pm 4\end{pmatrix}$ et par suite que toutes les racines carrées de A sont les matrices de la forme $R = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \pm 1 & 0\\ 0 & 0 & \pm 4\end{pmatrix}P^{-1}$ et il y en a donc $2 \times 2 = 4$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4241

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :
$$u_0 = 1,\ \ v_0 = 0,\ \ w_0 = 0$$
et les relations de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n\\ v_{n+1} = u_n + 2v_n\\ w_{n+1} = v_n + w_n\end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix},$$

et on note A la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Reconnaître, pour tout entier naturel n le produit AX_n.
   b. En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.
2. **a.** Démontrer que A admet une seule valeur propre.
   b. Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.
   La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.
   a. Déterminer une base (e_1', e_2', e_3') de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
   et que les vecteurs e_1', e_2', e_3' aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.
   On notera dorénavant $\mathcal{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').
   b. À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
   a. Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.
   b. Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).
   c. Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 4241

1. **a.** On a $AX_n = X_{n+1}$.
   b. La suite est donc « géométrique matricielle » de raison A et $X_n = A^n X_0$
2. **a.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   $$(A-\alpha I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{\begin{array}{r} (3-\alpha)\,x - y + z = 0 \\ x + (2-\alpha)\,y = 0 \\ y + (1-\alpha)\,z = 0 \end{array}\right. \iff (S)\left\{\begin{array}{r} [(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1]\,z = 0 \\ x = (2-\alpha)(1-\alpha)\,z = 0 \\ y = -(1-\alpha)\,z \end{array}\right.$$
   On a : $[(3-\alpha)(2-\alpha)(1-\alpha) + (1-\alpha) + 1] = -\alpha^3 + 6\alpha^2 - 12\alpha + 8$.
   2 est racine du polynôme $-x^3+6x^2-12x+8$, donc factorisable par $x-2$, et on obtient $-x^3+6x^2-12x+8 = (x-2)\left(-x^2+4x+4\right)$. Par ailleurs, 2 est racine double de $-x^2+4x+4$ et on obtient $-x^2+4x+4 = -(x-2)^2$ et $-x^3+6x^2-12x+8 = -(x-2)^3$.
   Donc si $\alpha \neq 2$ alors $(S) \iff x = y = z = 0$ et α n'est pas valeur propre.
   Et si $\alpha = 2$ alors $(S) \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = z \end{array}\right.$
   Ainsi, la seule valeur propre de A est 2.
   b. Le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \mathrm{Vect}\left((0,1,1)\right)$. La famille $((0,1,1))$ formée d'un seul vecteur non nul est libre et génératrice de E_2. Donc $\dim(E_2) = 1$. La somme des dimension des sous espaces propres de A , matrice d'ordre 3, est 1, et par suite A n'est pas diagonalisable.

3. **a.** La matrice de f dan la base $\mathcal{B}'$ est T si et seulement si :
$f(e_1') = 2e_1'$: $f(e_2') = 2e_2' + e_1'$ et $f(e_3') = 2e_3' + e_2'$

- Soit $e_1' = (0,1,1)$ vecteur propre associé à 2.
- $e_2' = (x, y, -1)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)(e_2') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y - 1 \\ x + 2y \\ y - 1 \end{pmatrix}$ donc :

$$f(e_2') = 2e_2' + e_1' \iff \begin{cases} 3x - y - 1 = 2x + 0 \\ x + 2y = 2y + 1 \\ y - 1 = -2 + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

et par suite $e_2' = (1, 0, -1)$

- $e_3' = (x, y, 2)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)(e_3') = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + 2 \\ x + 2y \\ y + 2 \end{pmatrix}$ donc :

$$f(e_2') = 2e_2' + e_1' \iff \begin{cases} 3x - y + 2 = 2x + 1 \\ x + 2y = 2y + 0 \\ y + 2 = 4 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

soit finalement $e_3' = (0, 1, 2)$

Reste à vérifier que (e_1', e_2', e_3') est bien une base (libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$) :
Soient α, β, γ réels. Si $\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = 0$ alors :

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = -\gamma \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre et $\mathcal{B}' = ((0,1,1), (1,0,-1), (0,1,2))$ est bien une base.

b. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$
et comme $T = 2I + N$ et que $N \cdot 2I = 2N = 2I \cdot N$ alors

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} 2^n I + \binom{n}{1} 2^{n-1} N + \binom{n}{2} 2^{n-2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} 0 \text{ si } n \geq 2 \\ &= 2^{n-2} \left(4I + 2nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right) \\ &= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formule qui est encore valable pour $n = 0$ et pour $n = 1$.

4. **a.** Par les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ on a $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. La formule de changement de base donne : $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = PTP^{-1}$, et ainsi : $A^n = PT^nP^{-1}$.

b. On montre que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ par la méthode de son choix : résolution d'un système, opérations simultanées sur la matrice identité par exempe.s

c. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= PT^n \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= P2^{n-2} \begin{pmatrix} 4 & 2n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n + \frac{1}{2}n(n-1) - 4 \\ 2n+4 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 2n+4 \\ 2n + \frac{1}{2}n(n-1) \\ \frac{1}{2}n(n-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ce qui donne : $\begin{array}{l} u_n = 2^{n-2}(2n+4) \\ v_n = 2^{n-2}\left[2n + \frac{1}{2}n(n-1)\right] \\ w_n = 2^{n-3}n(n-1) \end{array}$.