À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [4991] | 1| Tirage dans une urne | G2E 2015 Filère BCPST

Une urne contient initialement n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$.
On vide l'urne en extrayant toutes les boules de l'urne une à une, au hasard et sans remise.

(1). Pour tout entier i de $[\![1;n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i^{e} tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X_i.

(2). En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue, lorsqu'on vide l'urne.

Éléments de correction

(1). On commence par remarquer que lorsque l'on vide l'urne complètement, on obtient une permutation des n éléments de $\int 1, n$, que l'on peut toutes supposer équiprobables. Ainsi, Ω est l'ensemble des permutations des n élḿents de $[\![1;n]\!]$, et que $\operatorname{card}(\Omega) = n!$.

Support de X_i : il est immédiat que $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et par suite que X_i suit une loi de Bernoulli.

Loi de X_i : parmi les $n!$ permutations d'élements de $[\![1;n]\!]$, il y a en exactement $(n-1)!$ pour laquelle le i^{e} élement est i. Par suite, puisque l'on a supposé qu'il y a équiprobabilité, on en déduit que $[X_i = 1] = \dfrac{(n-1)!}{n!}$ ce qui donne $\mathbb{P}([X_i = 1]) = \dfrac{1}{n}$ et $\mathbb{P}([X_i = 0]) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

(2). On note S le nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue. Il est clair que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Par suite, par linéarité de l'espérance, il vient que : $\mathbb{E}(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$ et comme X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$, on en déduit que $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{n}$ et par conséquent que $\mathbb{E}(S) = n \times \dfrac{1}{n}$ ce qui donne $\mathbb{E}(S) = 1$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4992] | 2| Étude d'une suite récurrente | ENS 2017 Filière D2-Cachan

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{(x+1)^2} \end{array} \right.$$

et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array} \right.$

(1). Déterminer l'ensemble de définition de f, puis étudier les variations de f sur ce dernier.

(2).(a). Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(b). Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(3). On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a). Exprimer v_n à l'aide de u_n seulement.

(b). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $2 < v_n \leq 2 + \dfrac{1}{n}$.

(4). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a : $2(n+1) \leq \dfrac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(5).(a). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

(b). Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

(1). Ensemble de définition de f : Il est immédiat que l'expression $f(x)$ n'a de sens que si son dénominateur est non nul, et par suite, on a $\mathcal{D}_f =]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$.

Limites de f aux bornes de son ensemble de définition : il est clair que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, et par des arguments similiaires que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De même on a $f(x) \underset{x\to1}{\sim} -\dfrac{1}{(x+1)^2} \underset{x\to-1}{\longrightarrow} -\infty$.

Dérivée de f : la fonction $x \longmapsto (x+1)^2$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant seulement en -1, par opérations sur les fonctions dérivables, on en déduit que f est dérivable sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[$.

Il vient alors que : $\forall x \in]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;+\infty[,\ f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(x+1)^2 - x\times 2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)(x+1-2x)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{1-x}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

Variations de f : un étude du signe des fonctions affines constituant le quotient définissant f donne directement que :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(1+x)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

(2).(a). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ »

Montrons, par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : montrons que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est à dire que $0 < u_1 \leq \dfrac{1}{1}$.

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} u_1 &= f(u_0) \\ &= \frac{u_0}{(u_0+1)^2} \\ &= \frac{1}{(1+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et par suite, on a bien $0 < \frac{1}{4} \leq 1 = \frac{1}{1}$ c'est à dire que $0 < u_1 \leq \frac{1}{1}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n} \leq 1$

La fonction f étant strictement croissante sur $[0;1]$, il vient donc que : $f(0) < \underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$.

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{(n+1)^2}{n}} \\ &= \frac{n}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Or puisque $n < n+1$ on en déduit que $\frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$ ce qui assure alors que : $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

(b). Il est immédiat que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et ainsi, par le théorème d'encadrement, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(3).(a). Par définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient directement que : $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ v_n &= \frac{1}{f(u_n)} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n}{(1+u_n)^2}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{(1+u_n)^2 - 1}{u_n} \\ &= \frac{1+2u_n+u_n^2-1}{u_n} \\ &= \frac{2u_n+u_n^2}{u_n} \\ &= \frac{u_n(2+u_n)}{u_n} \\ &\underset{u_n\neq 0}{=} 2+u_n \end{aligned}$$

(b). Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n}$

il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 < 2+u_n \leq 2+\frac{1}{n}$

c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2 < v_n \leq 2+\frac{1}{n}$

(4). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Par sommation des inégalités précédentes, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=1}^{n-1}\left(2+\frac{1}{k}\right)$

Or on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} v_k &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}\right)\\ &= \frac{1}{u_{n-1+1}}-\frac{1}{u_1}\\ &= \frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_1}\\ &= \frac{1}{u_n}-4\end{aligned}$$

et ainsi que : $\displaystyle 2\times(n-1-1+1) \leq \frac{1}{u_n}-4 \leq 2\times(n-1-1+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

Finalement : $\displaystyle \underbrace{2\,(n-1)+4}_{=2n-2+4=2n+2} \leq \frac{1}{u_n} \leq \underbrace{2\,(n-1)+4}_{=2n-2+4=2n+2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

ce qui donne bien que : $\displaystyle 2\,(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2\,(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

(5).(a). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $k \in [\![1;n]\!]$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[k;k+1]$, donc on a : $\forall x \in [k;k+1]\,,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$

Par croissance de l'intégrale sur $[k;k+1]$, on a alors : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$

ce qui donne : $\displaystyle \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k}$

Par sommation de ces inégalités, il vient alors : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{=\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

ce qui donne ainsi : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

Sur le même principe, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $[k-1;k]$ pour $1 \leq k-1 \leq n$ avec $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

On a donc : $\forall x \in [k-1;k]\,,\ \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k-1}$

Par croissance de l'intégrale sur $[k-1;k]$, il vient : $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{k-1}\,\mathrm{d}t$

c'est à dire que : $\displaystyle\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k-1}$

Par sommation des inégalités, il vient alors que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \underbrace{\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}_{=\int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t} \leq \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k-1}$

ce qui donne ainsi : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

et donc que : $\displaystyle\underbrace{1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}}_{=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} \leq 1+\int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

Finalement, on obtient que : $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + 1$

(b). D'après la question **(4)**, on a : $\displaystyle\forall n \geq 2,\ 1 \leq \frac{1}{u_n \times 2(n+1)} \leq 1 + \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{2(n+1)}$

Or d'après la question précédente, on a : $\displaystyle\forall n \geq 2,\ \underbrace{\frac{\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{2(n+1)}}_{\frac{\ln(n)}{2(n+1)}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{2(n+1)} \leq \underbrace{\frac{\int_1^{n-1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{2(n+1)}}_{=\frac{\ln(n-1)}{2(n+1)}} + \frac{1}{2(n+1)}$

Or $\displaystyle\frac{\ln(n)}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\frac{\ln(n-1)}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n-1)}{2(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par le théorème d'encadrement on en déduit donc dans un premier temps que $\displaystyle\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puis que $\displaystyle\frac{1}{u_n \times 2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce qui assure alors que $u_n \times 2(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ ce que l'on peut traduire par $\displaystyle\frac{u_n}{\frac{1}{2(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)}$ ou encore que $\displaystyle u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.