À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Parlons avenir

Exercice| [OR02] | 1

Dans la construction de votre projet professionnel, vous êtes tombés par hasard sur la page suivante :

`https://www.concours-bce.com/la-journee-bce-des-cpge-litteraires`

Constatant que les statistiques sont donc de votre côté pour intégrer une école de commerce ou de management après une classe de BL et sachant que vous avez au préalable déjà consulté ces pages :

`https://www.ecoles-commerce.com/devenir-journaliste-apres-une-ecole-de-commerce-cest-possible/`
`https://diplomeo.com/actualite-ecole_commerce_programme_humanitaire`
`https://www.planetegrandesecoles.com/integrer-sciences-po-paris-apres-grande-ecole-de-commerce`
`https://grande-ecole.passerelle-esc.com/passmag/metiers-apres-ecole-de-commerce`

expliquez-moi en 200 mots $\pm 10\%$ quelles sont les raisons qui vous retiennent de vous présenter aux concours d'entrée en école de commerce l'an prochain ou les éventuels regrets que vous pourriez formuler au regard de vos choix d'option notamment et comment y remédier.

Éléments de correction

Pas de correction...

Un peu de technique

Exercice| [0619] | 2| Série définie par une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 - \cos(u_n) \end{cases}$

On admettra [a] que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0;1]$.

(1). Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

(2). En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.

(3). Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.

(4). Qu'en déduire pour la série numérique de terme général u_n ?

a. un simple raisonnement par récurrence permet de l'établir

Éléments de correction

(1). On sait que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) \in [-1;1]$, donc clairement $0 \leq 1 - \cos(x)$.

Soit alors $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - (1 - \cos(x))$.

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = x - \sin(x)$.

Soit alors $g : x \longmapsto x - \sin(x)$. La fonction g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 1 - \cos(x)$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geq 0$.

Les variations de la fonctions g sont alors les suivantes, et son signe s'en déduit sur $\mathbb{R}$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires puisque $g(0) = 0$, ce qui donne alors le signe de $f'(x)$ et les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$		$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $g(x) = f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f présente donc un minimum sur $\mathbb{R}$ qui est 0, et par suite, on en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$, c'est à dire $1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

Finalement, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq 1 - \cos(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors : $0 \leq 1 - \cos(u_n) \leq \dfrac{u_n^2}{2}$, c'est à dire $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n^2}{2}$.
Or par hypothèse, $u_n \in [0;1]$, donc on a $0 \leq u_n^2 \leq u_n$.
Ainsi, il vient : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.

(3). Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : par hypothèse, $u_0 \in [0;1]$, donc $u_0 \geq 0$.
Par ailleurs, $\dfrac{u_0}{2^0} = u_0$, et on a bien $u_0 \leq u_0$. Ainsi, on a : $0 \leq u_0 \leq \dfrac{u_0}{2^0}$, c'est à dire $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
D'après la question précédente, $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
Or par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
Il vient donc : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u_0}{2^n}$
Ce qui donne : $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{u_0}{2^{n+1}}$
et qui est bien $\mathcal{P}(n)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

(4). La série numérique de terme général $\dfrac{u_0}{2^n} = u_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et la série numérique de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ sont de même nature. Or puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, la série numérique de terme général $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente.
Par hypothèse, la série numérique de terme général u_n est à termes positifs avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{u_0}{2^n}$.
Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{u_0}{2^n}$ est convergente, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série numérique de terme général u_n est convergente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4612] | 3| Convergence et somme d'une série

On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

(1). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un réel r_n tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + r_n$.

(3). Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie converge vers 0.

(4). En déduire que la série $\sum u_n$ est convergente et déterminer sa somme.

Éléments de correction

(1). On a que : $\forall \in \mathbb{N},$
$$\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\times 1^{2n+1} - \frac{1}{2n+1}\times 0^{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$
et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

(2). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \underset{\substack{\text{Linéarité}\\ \text{de l'intégrale}}}{=} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\left(-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t\\
&\underset{\substack{\text{Somme des termes}\\ \text{d'une suite géométrique}}}{=} \int_0^1 \left(\frac{1-\left(-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}_{=r_n}
\end{aligned}$$

(3). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a directement que :
$$\begin{aligned}
|r_n| &= \left|-\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&\underset{1+t^2\geq 1}{\leq} \int_0^1 t^{2n+2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2n+3}
\end{aligned}$$
Or $\dfrac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par encadrement $|r_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(4). Puisque $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, et donc que la suite des sommes partielles associée à la série numérique de terme général u_n admet une limite finie qui est $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, la série numérique de terme général u_n est convergente et a pour somme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, c'est à dire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Or un calcul direct donne que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$, d'où la somme de cette série.