Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2074

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et q un nombre réel différent de 1.

Sans justification, rappelez les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ en fonction de n et de q.

2. Écrire sans le symbole $\sum$ les sommes R, S et T suivantes, puis les calculer :

$$R = \sum_{k=0}^{5} \left(k^2+1\right), \qquad S = \sum_{k=2}^{7} \left(k-k^2\right) \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{5} 2^k$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(k^2 - (2k-1)^2\Big)$.

a. En utilisant les propriétés sur les sommes écrites à l'aide d'un symbole $\sum$, exprimer la somme S_n en fonction de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.

On pourra au préalable développer l'expression $k^2 - (2k-1)^2$.

b. On admet que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

En déduire une expression de S_n en fonction de n. On simplifiera au mieux l'expression obtenue.

EX. 2 | Réf. 2301

Donner l'écriture matricielle du système suivant, puis le résoudre :

$$\mathcal{S} : \quad \begin{cases} -2x+3y+t=14 \\ -x+2y-2z-2t=10 \\ 2x+3y-z+t=8 \\ -2x+y+z+t=6 \end{cases}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2297

L'intensite $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ $(\lambda > 0)$ est donnée par :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5} \mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}$$

où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

1. Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de la constante K.

2. Déduisez-en $I(\lambda_0)$.