Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 4595

Diagonaliser dans $\mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

EX. 2 | Réf. 1382

1. Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -6 \\ -16 & 15 & -8 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ possèdent les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
2. En déduire que A et B sont semblables en explicitant une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Préparation à l'oral

EX. 3 | Réf. 1374

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ et en déduire que 1 est la seule valeur propre possible de A.
2. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4596

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathrm{sp}(A) = \left\{1, 1 + \frac{1}{n}\right\}$.
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
3. La matrice A_n est-elle inversible ?

Pour s'occuper les jours de pluies

CC BY NC ND

EX. 5 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

4. On définir alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

b. Vérifier que T est inversible et démontrer alors que f est un automorphisme de E.

c. Est-ce que la matrice T est diagonalisable ?

d. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.

i. Montrer que f admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.

ii. f est-elle diagonalisable ?