Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [4884] | 1| Gradient et matrice hessienne

Pour $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on appelle vecteur gradient de f en (x,y) noté $\nabla f(x,y)$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

et matricie hessienne de f en (x,y), la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2 f(x,y)$ définie par :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y^2+1 \end{array} \right.$$

On définit F par : $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\|f(x,y)\|^2 \end{array} \right.$ où $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit la matrice $J(x,y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le vecteur gradient de F en (x,y).

(2). Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de F, peut se mettre sous la forme suivante :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x^3+2xy+3x+y^2+1 & = & 0 \\ (x-y)\left(2x^2+2xy+2y^2-x-y+3\right) & = & 0 \end{array} \right.$$

(3). Établir, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité $2x^2+2xy+2y^2-x-y+3 > 0$.

En déduire que l'unique point critique de F est $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(4). Déterminer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de F en (x,y).

En déduire que F admet un minimum local en $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(5). En notant $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ et $G(x,y) = {}^tJ(x,y)\,J(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer ${}^tJ(x,y)\,f(x,y)$ et $G(x,y) + f_1(x,y)\,\nabla^2 f_1(x,y) + f_2(x,y)\,\nabla^2 f_2(x,y)$ en fonction de $\nabla F(x,y)$ et $\nabla^2 F(x,y)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice|[4885]| 2| Suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P'' - 4xP' \end{array} \right.$.

(1). Soit n un entier naturel n fixé uniquement dans cette question.

(a). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b). Calculer $f(1)$, $f(x)$ puis $f\left(x^k\right)$ pour tout $k \in [\![2; n]\!]$.
En déduire que la matrice $A_n$de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.

(c). Montrer que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres et de dimension 1.

(d). Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Montrer que $\lambda = -4\deg(P)$.

(e). Soit P_n un vecteur propre associé à la valeur propre $-4n$ dont on note a_n le coefficient du terme de degré de plus haut degré.
Montrer que $H_n = \dfrac{1}{a_n} P_n$ est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-4n$, qu'il est de degré exactement n et que son coefficient du terme de degré n est égal à 1.

(f). En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\star_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n$$

(2). On se propose dans cette question d'étudier la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente.

(a). En dérivant la relation $(\star_n)$, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

(b). En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n' = nH_{n-1}$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ H_n - xH_{n-1} + \dfrac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$

(c). Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = x$?
Calculer alors H_2 et H_3.