Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Parlons avenir

Exercice| [OR01] | 1

En 250 mots $\pm 10\%$, expliquer dans quel(s) champ(s) professionnel(s) vous souhaitez vous engager dans 5 ans et ce qui vous y attire, ainsi qu'identifier le(s) métier(s) que vous aspirez y exercer.

Un peu de technique

Exercice| [2198] | 2| Intégration

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

(1). À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.

(2). À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2158] | 3| Calcul intégral et suite

Soit f la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{\,2x} - 1}{\mathrm{e}^{\,2x} + 1} \end{array}\right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} (f(x))^n\,\mathrm{d}x$.

(1).(a). Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en étudier son signe.

(b). Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(c). Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

(2).(a). Justifier que, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(b). En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right)$.

(c). Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

(3). Calculer I_0 et I_1.

On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\quad \dfrac{x-1}{x+1} = -1 + \dfrac{2x}{x+1}$,

(4). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad (f(x))^2 + f'(x) = 1$.

(5). Calculer alors $I_{n-2} - I_n$ pour tout $n \geq 2$.

(6). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$.

(a). Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad S_n = I_0 + I_1 - I_n - I_{n+1}$.

(b). En déduire $\lim_{n \to +\infty} S_n$.