Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4702

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4702

On procèdera méthodiquement :
- obtention du polynôme caractéristique puis des valeurs propres ;
- recherche des sous-espaces propres ;

et on essaiera d'exploiter tous les résultats en terme de diagonalisabilité au fur et à mesure de leur obtention.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4109

Soit $\varphi \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ.
2. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_φ ? Quelle est la dimension de chaque sous-espace propres ? À quelle matrice diagonale D_φ la matrice A_φ est-elle semblable ?
3. Déterminer une base $\left(\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$ de vecteurs propres de φ.
4. On pose $D_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_1}\right)$. Justifier que D_1 est stable par φ.
5. On pose $P_1 = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{c_2}, \overrightarrow{c_3}\right)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4109

1. On commencera par expliciter le déterminant à calculer, puis on mettra en oeuvre toutes les techniques usuelles de calcul de déterminant. On gardera à l'esprit qu'il faut obtenir une forme factorisée de ce dernier afin d'obtenir facilement les valeurs propres de φ.
2. Ces dernières se lisent directement sur le polynôme caractéristique, et le reste de la question se traite sans avoir à chercher les vecteurs propres correspondants. Attention au théorème mobilisé.
3. On cherche ici les vecteurs propres par les techniques usuelles.
4. On dispose d'un théorème pour conclure...
5. On revient à la définition de ce ce que c'est qu'être stable.