## Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

## Travailler les fondamentaux

### EX. 1 | Réf. 4595

Diagonaliser dans $\mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4595

- On commencera par déterminer les valeurs propres de $A$.
- Puis, pour chacune d'entre-elles on cherchera une base du sous-espace propre associé.

### EX. 2 | Réf. 1382

1. Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -6 \\ -16 & 15 & -8 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ possèdent les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.
2. En déduire que $A$ et $B$ sont semblables en explicitant une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

### EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1382

1. On pourra rechercher les valeurs propres de $B$ à l'aide de son polynôme caractéristique, puis vérifier que les valeurs propres trouvées pour $B$ sont valeurs propres de $A$, sans oublier de discuter sur leur ordre de multiplicité...
2. On écrira les relations de semblablitudes des deux matrices $A$ et $B$ à la même matrice diagonale, que l'on exploitera pour écrire une relation de semblablitude entre $A$ et $B$.
   Il restera alors à calculer les différentes matrices pour obtenir la matrice $P$ demandée.

## Préparation à l'oral

### EX. 3 | Réf. 1374

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ et en déduire que 1 est la seule valeur propre possible de $A$.
2. Montrer que la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

### EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1374

1. On pourra remarquer que $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ est le développement d'une identité remarquable avec le binôme de Newton, puis utiliser le fait que si $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et $X \in E_\lambda(A)$, alors $A^2X = \lambda^2 X$, etc.
2. On effectuera un raisonnement par l'absurde pour établir le résultat.

## Mobiliser toutes ses connaissances

**EX. 4 | Réf. 4596**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n+2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathrm{sp}(A) = \left\{1, 1+\frac{1}{n}\right\}$.
2. La matrice $A_n$ est-elle diagonalisable ?
3. La matrice $A_n$ est-elle inversible ?

**EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4596**

## Pour s'occuper les jours de pluies

**EX. 5 | Réf. 4117**

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que $(A, B, C)$ est une base de $\mathcal{E}$.
2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}, \quad M \times N \in \mathcal{E}$.
3. Montrer que, pour toute matrice $M$ de $\mathcal{E}$, si $M$ est inversible, alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
4. On définir alors l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$ .
   - **a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
   - **b.** Vérifier que $T$ est inversible et démontrer alors que $f$ est un automorphisme de $E$.
   - **c.** Est-ce que la matrice $T$ est diagonalisable ?
   - **d.** On note $F$ la matrice de $f$ dans la base $(A, B, C)$ de $\mathcal{E}$.
     - **i.** Montrer que $f$ admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.
     - **ii.** $f$ est-elle diagonalisable ?

**EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4117**

1. On peut répondre aux deux questions en même temps à condition de montrer la liberté de la famille $(A, B, C)$.
2. On effectue le produit matriciel pour deux matrices quelconques de $\mathcal{E}$ et on montre que le produit obtenu est encore dans $\mathcal{E}$.
3. Il est facile d'avoir l'expression de $M^{-1}$ en fonction de $M$ et de conclure...
4. **a.** RAS
   - **b.** RAS pour l'inversibilité de $T$. Pour le caractère bijectif de $f$ utiliser le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs en n'étudiant que le caractère injectif de $f$.
   - **c.** La réponse est dans la question.
   - **d.** **i.** Commencer par exprimer $F$ pour obtenir les éléments propres de $f$ demandés.
     - **ii.** Raisonner par l'absurde pour conclure.