Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 4224

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\mathcal{S}$ d'inconnues les fonctions $x : t \longmapsto x(t)$, $y : t \longmapsto y(t)$ et $z : t \longmapsto z(t)$ suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 4y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -4x(t) + 3y(t) + 3z(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4224

- On commence par expliciter une matrice A de taille 3×3 telle que $X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(z) \\ z(t) \end{pmatrix}$
- On diagonalise complètement A ;
- On effectue le changement de fonction vectorielle inconnue $X(t) = PY(t)\dots$
- On détermine $Y(t)$ puis on revient à $X(t)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 4226

On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
2. En utilisant la matrice P, montrer que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0, 1, -2\}$ et justifier que A est diagonalisable. On notera alors D la matrice diagonale obtenue à partir de la relation $A = PDP^{-1}$.
3. Soit $k \in \mathbb{R}$. On définit alors l'ensemble $\mathcal{C}_k = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = kMA\}$.
   Montrer que $\mathcal{C}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Pour tout $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ on pose $N = P^{-1}MP$. Montrer alors l'équivalence : $(AM = kMA) \Leftrightarrow (DN = kND)$
5. En posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'') \in \mathbb{R}^9$, établir le système d'équations noté $\mathcal{S}$ vérifié par $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'')$ caractérisant l'égalité $DN = kND$.
6. Soit $k \in \mathbb{R}$. On pose $\mathcal{C}'_k = \{N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ DN = kND\}$ et on admet que C'_k est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   a. Déterminer la forme des matrices des sous-espaces C'_0, C'_1, C'_{-2} et C'_{-1}.
   b. Déterminer une base de $\mathcal{C}_1$, puis une base de $\mathcal{C}_{-1}$.
   On ne demande pas d'expliciter les matrices de ces deux bases.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4226

1. Un calcul de déterminant donne la réponse...
2. En se souvenant que les colonnes de P sont obtenues lors d'une diagonalisation à l'aide des vecteurs propres de

A, il suffit de faire les produits de A par chacune des colonnes de P pour obtenir les trois valeurs propres de A et conclure.

3. On reprend le plan classique...

4. « Retourner » la relation $N = P^{-1}MP$ pour l'utiliser ensuite dans $AM = kMA$.

5. A part faire les deux produits et identifier les deux matrices obtenues...

6. a. On résout les systèmes obtenues précédement pour $k \in \{0, 1, -2, -2\}$.

b. On exploite le lien existant entre $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}'_k$.

Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 3 | Réf. 4225

Dans tout ce problème n désignera un entier supérieur ou égal à 2.
On note Δ_n l'ensemble des matrices de $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les deux propriétés suivantes :

$\mathcal{P}_1$ **:** les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ de M sont des valeurs propres de M ;

$\mathcal{P}_2$ **:** la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$.

1. a. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathscr{M}(\ltimes)R$, appartiennent à Δ_n.

b. Si M est une matrice de Δ_n, établir que pour tout réel α, la matrice $M + \alpha\mathrm{I}_n$ est encore un élément de Δ_n.

c. On note K_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

i. Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à Δ_n.

ii. L'ensemble Δ_n est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

d. i. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, les nombres x et y sont non nuls.

ii. En déduire que l'ensemble Δ_2 ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

e. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à Δ_3.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

2. Pour tout réel t on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$

a. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t.
En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à Δ_3.

b. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice est diagonalisable.

3. Une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente lorsqu'il existe une entier naturl p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

a. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que 0 est une valeur propre M et que c'est la seule valeur propre de M.

b. Soit M une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. L'objet de cette question est de montrer que M^3 est la matrice nulle.
Pour cela, on effectue un raisonnement par l'absurde en supposant donc que M n'est pas la matrice nulle.
Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice M.

i. Montrer les inclusions $\operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(u^2\right) \subset \operatorname{Ker}\left(u^3\right)$.

ii. Montrer que les noyaux $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(u^3\right)$ ne peuvent pas être égaux.
Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2 et en tirer une contradiction.

iii. Montrer que les noyaux $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}\left(u^2\right)$ ne peuvent pas être égaux non plus.

iv. Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

4. Soit $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.
   - **a.** Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)\mathrm{I}_3$.
   - **b.** Montrer que la matrice M est nilpotente si, et seulement si, $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
   - **c.** On suppose dans cette question que a, b et d sont égaux à 1.
     Justfier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet $(c,e,f) \in \mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.
   - **d.** En déduire que l'ensemble Δ_3 contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
   - **e.** Exhiber une matrice de Δ_3 dont tous les coefficients sont non nuls.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4225

1. **a.** La forme de la matrice donne directement le polynôme caractéristique.
   b. On utilise la définition d'une valeur propre.
   c. **i.** Il est facile de voir que n est valeur propre.
   ii. Utiliser K_n pour donner un contre-exemple.
   d. **i.** Un échelonnement ou une discussion sur le déterminant donne la solution.
   ii. Utiliser la toute première question de l'exercice.
   e. RAS
2. **a.** Tout moyen d'obtention des valeurs propres est bon. Il faut juste gérer le paramètre t.
   b. C'est une suite des calculs précédents pour les bonnes valeurs de t
3. **a.** Utiliser le fait que $M^p = (0)$.
   b. **i.** C'est une conséquence de la linéarité de u.
   ii. Se laisser guider par le raisonnement par l'absurde proposé et la récurrence à faire.
   iii. Transposer le raisonnement fait à la question précédente.
   iv. Tout est dit dans la question.
4. **a.** C'est assez calculatoire…
   b. Exploiter le fait que $M^3 = (0)$.
   c. Utiliser la question précédente.
   d. Même chose.
   e. Donner des valeurs aux coefficients précédents pour obtenir la matrice souhaitée.