À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [4884] | 1| Gradient et matrice hessienne

Pour $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on appelle vecteur gradient de f en (x,y) noté $\nabla f(x,y)$ l'élément de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

et matricie hessienne de f en (x,y), la matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\nabla^2 f(x,y)$ définie par :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y+1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y^2+1 \end{array} \right.$$

On définit F par : $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\|f(x,y)\|^2 \end{array} \right.$ où $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on définit la matrice $J(x,y) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par : $J(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, le vecteur gradient de F en (x,y).

(2). Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de F, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x^3+2xy+3x+y^2+1 & = 0 \\ (x-y)\left(2x^2+2xy+2y^2-x-y+3\right) & = 0 \end{cases}$$

(3). Établir, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité $2x^2+2xy+2y^2-x-y+3>0$.

En déduire que l'unique point critique de F est $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(4). Déterminer pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice hessienne de F en (x,y).

En déduire que F admet un minimum local en $\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$.

(5). En notant $f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ et $G(x,y) = {}^tJ(x,y)\,J(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer ${}^tJ(x,y)\,f(x,y)$ et $G(x,y) + f_1(x,y)\,\nabla^2 f_1(x,y) + f_2(x,y)\,\nabla^2 f_2(x,y)$ en fonction de $\nabla F(x,y)$ et $\nabla^2 F(x,y)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de calculer les dérivées partielles premières de F après avoir exprimé $F(x,y)$ sans nécessairement aller jusqu'au bout des calculs.

(2). Les points critiques de F sont ceux qui annulent le vecteur gradient, et une simple combinaison de lignes permet d'obtenir la forme du système demandé en se souvenant que $x^3 - y^3$ peut se factoriser par $x - y$.

(3). On mobilisera les identités remarquables pour essayer de factoriser au mieux l'expression dont on cherche le signe et surtout réussir à prouver qu'elle ne peut s'annuler. Les points critiques de F s'en déduisent alors puisque le système précédemment écrit donne directement que $x = y$ et une première équation plus simple.
On remarquera par ailleurs que $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + (x+1)^3$.

(4). Il s'agit de calculer les dérivées partielles secondes de F, puis de remarquer que le signe du déterminant de la matrice hessienne de F donnera la nature du point critique de F.

(5). On explicite les différents vecteurs et matrices qui interviennent, et on transforme les expressions proposées de sorte à faire apparaître le vecteur gradient et la matrice hessienne, en faisant bien attention à la nature des objets manipulés.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [4885] | 2| Suite de polynômes

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[x]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P'' - 4xP' \end{array} \right.$.

(1). Soit n un entier naturel n fixé uniquement dans cette question.

(a). Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

(b). Calculer $f(1)$, $f(x)$ puis $f\left(x^k\right)$ pour tout $k \in [\![2;n]\!]$.
En déduire que la matrice $A_n$de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est triangulaire.

(c). Montrer que f est diagonalisable et que chacun de ses sous-espaces propres et de dimension 1.

(d). Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
Montrer que $\lambda = -4\deg(P)$.

(e). Soit P_n un vecteur propre associé à la valeur propre $-4n$ dont on note a_n le coefficient du terme de degré de plus haut degré.
Montrer que $H_n = \dfrac{1}{a_n} P_n$ est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre $-4n$, qu'il est de degré exactement n et que son coefficient du terme de degré n est égal à 1.

(f). En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire H_n de degré n tel que :

$$(\star_n) : \quad f(H_n) = -4nH_n$$

(2). On se propose dans cette question d'étudier la suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite à la question précédente.

(a). En dérivant la relation $(\star_n)$, démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

(b). En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n' = nH_{n-1}$
puis que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ H_n - xH_{n-1} + \dfrac{(n-1)H_{n-2}}{4} = 0$

(c). Pourquoi peut-on affirmer que $H_0 = 1$ et $H_1 = x$?
Calculer alors H_2 et H_3.

Pistes de réflexion

(1).(a). Le caractère linéaire de f est une conséquence de la linéarité de la dérivation, restera à montrer que l'image d'un élément de $\mathbb{R}_n[x]$ par f est un élément de $\mathbb{R}_n[x]$ en considérant les opérations sur les degrés des polynômes par exemple.

(b). On procède au calcul des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ à partir de la définition de f, et on s'aperçoit qu'en reconstituant la matrice de f, cette dernière est triangulaire supérieure de part le degré de l'image de chaque vecteur de la base canonique par f.

(c). La matrice de f étant triangulaire supérieure, toutes ses valeurs propres se situent sur la diagonale de sa matrice, et elles sont toutes distinctes.

(d). On écrira $P = \alpha x^N + Q_N$ avec $\deg(P) = N > 0$ et $Q_N \in \mathbb{R}_{N-1}[x]$ en justifiant la légitimité de cette écriture pour faire le lien entre α, le degré de P et λ

(e). On montrera par linéarité de f que $f\left(H_n\right) = -4nH_n$ dans un premier temps, puis on déterminera son degré en exploitant les résultats précédents. Son coefficient dominant est clairement égal à 1 par ailleurs.

(f). L'existence est assurée par la question prééédente, il reste à assurer l'unicité en considérant par exemple un autre polynôme satisfaisant ces conditions et montrer qu'il est égal à H_n en utilisant notamment la dimension des sous-espaces propres de f.

(2).(a). Comme proposé on dérive $(\star_n)$ et on revient à la définition de f pour faire apparaître une relation qui permet d'affirmer que $f\left(H_n'\right) = -4(n-1)H_n$.

(b). Là encore, H_n' appartenant au sous-espace propre associé à la valeur propre $-4(n-1)$ d'après la question précédente, on justifiera qu'il est colinéaire à H_{n-1}, mais il s'agira ensuite d'identifier le coefficient de colinéarité entre H_n' et H_{n-1}.

Pour la deuxième relation il s'agira de dériver la relation obtenue, puis de réinvestir la relation $(\star_n)$ à bon escient.

(c). On traduira en terme de vecteurs propres le fait que $f(1) = \tilde{0}$ et $f(x) = -4x$ pour identifier avec H_0 et H_1, et pour H_2 et H_3, on mobilisera la relation de récurrence établie précédemment.