Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2005

1. On considère l'équation (E) dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{-x^2+2x+9} = 1+x$.

a. Pour quelles valeurs de x l'expression $\sqrt{-x^2+2x+9}$ est-elle définie ?

b. Existe-t-il des solutions à l'équation si $1+x$ est strictement négatif ? Justifier votre réponse.

2. a. On suppose à présent que $x \geq -1$. Trouver une équation du second degré équivalente à (E), puis la résoudre.

b. Conclure en donnant l'ensemble des solutions de l'équation (E).

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2005

1. a. L'expression $\sqrt{-x^2+2x+9}$ n'est définie que si $-x^2+2x+9 \geq 0$. Il faut donc étudier le signe du polynôme de degré 2 $-x^2+2x+9$, qui a pour coefficient du terme de degré 2, un nombre négatif, et pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times(-1)\times 9 = 4+36 = 40 > 0$, et donc qui possède deux racines $x_1 = 1+\sqrt{10}$ et $x_2 = 1-\sqrt{10}$. Ainsi :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{10}$		$1+\sqrt{10}$		$+\infty$
Signe de $-x^2+2x+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Par suite, l'expression $\sqrt{-x^2+2x+9}$ n'est définie que si $x \in \left[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}\right]$.

b. Supposons que $1+x<0$. La quantité $\sqrt{-x^2+2x+9}$ est elle positive ou nulle dès lors qu'elle existe. Ainsi, cette équation ne peut avoir de solutions si $1+x<0$, c'est à dire dès lors que $x<-1$.

On en conclut que les solutions de l'équation (E), si il y en a, sont nécessairement dans l'intersection des intervalles $\left[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}\right]$ et $[-1; +\infty[$, c'est à dire $\left[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}\right]$.

2. a. Puisque $x \geq -1$, les deux membres de cette égalité sont positifs ou nul et on a alors bien l'équivalence :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+2x+9 = (1+x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x=2 \quad \text{ou} \quad x=-2)$$

b. La solution $x=-2$ n'appartient pas à l'intervalle $\left[1-\sqrt{10}; 1+\sqrt{10}\right]$, alors que $x=2$ oui. Par conséquent (E) n'admet que $x=2$ comme solution.

EX. 2 | Réf. 2302

Soit $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{array} \right.$. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 0$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2302

- La fonction $x \longmapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1;1[$ et de dérivée la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- En notant $u : x \longmapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = u'(x) \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\right)$.

Or : $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \\ \qquad \text{et} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad 1-(u(x))^2 = \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2} \end{array} \right.$.

Ainsi, en reportant, il vient : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \right)$, soit $f'(x) = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{\sqrt{(1+x^2)^2}}{\sqrt{4x^2}}$.

Or, puisque que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $1+x^2>0$ et $4x^2>0$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{2x} \text{ soit } f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 1930

On a voulu tester l'isolation thermique d'une pièce d'un appartement et on a opéré de la façon suivante :

On a chauffé la pièce jusqu'à ce que la température soit stabilisée à 19℃. On a alors totalement coupé le chauffage à l'instant $t=0$. On a observé l'évolution de la température dans la pièce et on a noté qu'à chaque intervalle d'une demi-heure, correspondait une baisse de la température de $\frac{1}{10}$ de sa valeur.

Dans tout le problème, le temps t est exprimé en heures.
On admet que la température, exprimée en degré Celsius, dans la pièce au bout du temps t, est donnée par la fonction θ dont l'expression est :

$$\theta(t) = \theta(0) \times \mathrm{e}^{kt\ln(0,9)} \qquad (\star)$$

où k est une constante réelle, et $\theta(0)$ est la température à l'instant $t=0$.

1. À quoi correspond la valeur $\theta(0,5)$? Puis justifier que $\theta(0,5) = \frac{9}{10}\theta(0)$.
2. À l'aide de la relation $(\star)$, déterminer alors la valeur de k, et écrire explicitement l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t.
3. Donner l'expression de la dérivée $\theta'(t)$ de θ sur l'intevalle $[0;+\infty[$, et en déduire le tableau de variation de la fonction θ sur l'intervalle $[0;6]$.
4. Dans une autre pièce, au cours d'une expérience analogue, la courbe représentant la variation de température en fonction du temps t avait pour équation $\theta(t) = 20\mathrm{e}^{2t\ln(0,8)}$.
   Quel avait été, dans cette pièce, le temps nécessaire pour que l'on y observe un abaissement de la température de 20°C à 6°C ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 1930

1. $\theta(0,5)$ correspond à la température de la pièce au bout de 30 minutes. Puisque « on a noté qu'à chaque intervalle d'une demi-heure, correspondait une baisse de la température de $\frac{1}{10}$ de sa valeur », la valeur de $\theta(0,5)$ est donc égale à $\frac{9}{10}$ de la température une demi-heure avant, c'est à dire $\theta(0)$, d'où la relation proposée.
2. La relation $(\star)$ permet d'écrire que $\theta(0,5) = \theta(0)\mathrm{e}^{k\times 0,5\times\ln(0,9)}$ et comme $\theta(0,5) = \frac{9}{10}\theta(0)$, il vient la relation $\frac{9}{10} = \mathrm{e}^{k\times 0,5\times\ln(0,9)}$. Ainsi : $\frac{9}{10} = \mathrm{e}^{k\times 0,5\times\ln(0,9)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{9}{10}\right) = k \times 0,5 \times \ln(0,9) \Leftrightarrow 1 = k \times 0,5$ et par conséquent $k=2$.
   Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\quad \theta(t) = 19\mathrm{e}^{2t\ln(0,9}$
3. Il vient directement : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\theta'(t) = 2\ln(0,9)\mathrm{e}^{2t\ln(0,9)}$. Or $\ln(0,9)<0$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^{2t\ln(0,9)}>0$, il vient, que pour tout $t\geq 0$, $\theta'(t)<0$, et la fonction θ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

t	0		6
Signe de $\theta'(t)$		$-$	
Variations de θ	19	$\searrow$	$\theta(6) \approx 5.4$

4. Les variations de la fonction température θ dans cette autre pièce sont identiques à celles de la première situation, seule la valeur $\theta(0)$ diffèrera (et bien sûr celle de $\theta(6)\ldots$) et qui vaudra ici 20.

On cherche donc à résoudre l'inéquation $\theta(t) \leq 6$. Ainsi : $20\mathrm{e}^{2t\ln(0,8)} \quad \Leftrightarrow \quad 2t\ln(0,8) \leq \ln(0.3)$.

$$\Leftrightarrow \quad t \geq \frac{1}{2}\frac{\ln(0,3)}{\ln(0,8)} \text{ puisque } \ln(0,8) < 0$$

Le temps qui s'est alors écoulé est de l'ordre de $2,7$ heures pour que la température passe de 20 degrés à 6 degré dans cette pièce.