Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2074

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et q un nombre réel différent de 1.

Sans justification, rappelez les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ en fonction de n et de q.

2. Écrire sans le symbole $\sum$ les sommes R, S et T suivantes, puis les calculer :

$$R = \sum_{k=0}^{5} \left(k^2+1\right), \qquad S = \sum_{k=2}^{7} \left(k-k^2\right) \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=0}^{5} 2^k$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(k^2-(2k-1)^2\Big)$.

a. En utilisant les propriétés sur les sommes écrites à l'aide d'un symbole $\sum$, exprimer la somme S_n en fonction de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1$.

On pourra au préalable développer l'expression $k^2-(2k-1)^2$.

b. On admet que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

En déduire une expression de S_n en fonction de n. On simplifiera au mieux l'expression obtenue.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2074

1. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$.

2. On écrit explicitement les sommes demandées :

$$\begin{array}{rcl}
R & = & \left(0^2+1\right)+\left(1^2+1\right)+\left(2^2+1\right)+\left(3^2+1\right)+\left(4^2+1\right)+\left(5^2+1\right)\\
 & = & 1+2+5+10+17+26\\
 & = & 61\\
S & = & \left(2-2^2\right)+\left(3-3^2\right)+\left(4-4^2\right)+\left(5-5^2\right)+\left(6-6^2\right)+\left(7-7^2\right)\\
 & = & -2-6-12-20-30-42\\
 & = & -112\\
T & = & 2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5\\
 & = & 1+2+4+8+16+32\\
 & = & 63
\end{array}$$

3. **a.** On développe au préalable l'expression $k^2-(2k-1)^2$ pour obtenir : $k^2-(2k-1)^2 = -3k^2+4k-1$. Par suite, on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl}
S_n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(k^2-(2k-1)^2\right)\\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-3k^2+4k-1\right)\\
 & = & \displaystyle -3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1
\end{array}$$

4. On en déduit ainsi que :

$$\begin{aligned}
S_n &= -3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1 \\
&= -3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\times\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
&= \frac{-n(n+1)(2n+1)}{2} + 2n(n+1) - n - 1 \\
&= n\left(\frac{-(n+1)(2n+1)}{2} + 2(n+1) - 1\right) - 1 \\
&= n\left(\frac{-(n+1)(2n+1)}{2} + 2n + 1\right) - 1 \\
&= n(2n+1)\left(1 - \frac{n+1}{2}\right) - 1 \\
&= n(2n+1)\times\frac{2-(n+1)}{2} - 1 \\
&= \frac{n(2n+1)(1-n)}{2} - 1
\end{aligned}$$

EX. 2 | Réf. 2301

Donner l'écriture matricielle du système suivant, puis le résoudre :

$$\mathcal{S}:\quad \left\{\begin{array}{l} -2x+3y+t=14 \\ -x+2y-2z-2t=10 \\ 2x+3y-z+t=8 \\ -2x+y+z+t=6 \end{array}\right.$$

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2301

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 & 14 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & 22 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 12L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 23 & 32 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & 4 \end{array}\right)
\underset{L_4 \leftarrow L_4 + \frac{7}{23}L_3}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 1 & 14 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 23 & 32 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{23} & -\frac{6}{23} \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{368}{3}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{115}{12}L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{23}{6}L_4}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 23 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{23} & -\frac{6}{23} \end{array}\right)
\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{2}{23}L_3}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 23 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{23} & -\frac{6}{23} \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 6L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 23 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{23} & -\frac{6}{23} \end{array}\right)
\underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{23}L_3 \\ L_4 \leftarrow -\frac{23}{6}L_4}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

En revenant aux inconnues x, y, z et t du système, on en déduit les solutions de $\mathcal{S}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 3 \\ z &=& -2 \\ t &=& 1 \end{array}\right.$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2297

L'intensite $I(\lambda)$ du rayonnement d'une étoile pour une longueur d'onde λ ($\lambda > 0$) est donnée par :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^5}\mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}$$

où K est une constante positive qui dépend de l'étoile.

1. Démontrer que l'intensité $I(\lambda)$ rayonnée par l'étoile est maximale pour une valeur λ_0 de λ que l'on déterminera en fonction de la constante K.
2. Déduisez-en $I(\lambda_0)$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2297

1. • **Calcul de $I'(\lambda)$:** pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $I'(\lambda) = \mathrm{e}^{-\frac{K}{\lambda}}\dfrac{-5\lambda + K}{\lambda^7}$.
   • **Étude du signe de $I'(\lambda)$:** puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{K}{x}} > 0$, et comme pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x^7} > 0$, il suffit d'étudier le signe de $-5\lambda + K$ pour en déduire le signe de $I'(\lambda)$.
   • Il est inutile ici de chercher les limites en 0 et en $+\infty$ de I de part la question qui nous est posée. Le tableau de variation permet d'y répondre, dans avoir à faire plus.

   Ainsi, I présente un maximum pour $\lambda = \dfrac{K}{5}$.
2. On calcule donc $I\left(\dfrac{K}{5}\right)$, et on obtient $I\left(\dfrac{K}{5}\right) = \dfrac{3215}{K^5\mathrm{e}^5}$.

λ	0		$\frac{K}{5}$		$+\infty$
Signe de $-5\lambda + K$		$+$	0	$-$	
Signe de $I'(\lambda)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de I	‖	↗	$I\left(\frac{K}{5}\right)$	↘	