## Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Travailler les fondamentaux

### EX. 1 | Réf. 4595

Diagonaliser dans $\mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 4595

**Recherche des valeurs propres de $A$ :** on sait que : $(\lambda \in \mathrm{sp}(A)) \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_A(\lambda) = 0)$

Par définition :

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{I}_4 - A) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -\lambda-1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + \ldots + C_4}{=} \begin{vmatrix} \lambda-5 & -1 & -1 & -2 \\ \lambda-5 & \lambda-1 & -2 & -1 \\ \lambda-5 & -2 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-5 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
underset \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_1}{=} (\lambda-5) \left( (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 \right) \\
&= (\lambda-5)(\lambda+1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } L_3}{=} (\lambda-5)(\lambda+1) \left( (-1)^{3+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 \right) \\
&= (\lambda-5)(\lambda+1)(\lambda \times \lambda - (-1) \times (-1)) \\
&= (\lambda-5)(\lambda+1)\left(\lambda^2 - 1\right) \\
&= (\lambda-5)(\lambda+1)^2(\lambda-1)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathrm{sp}(A) = \{5, 1, -1\}$ avec $\begin{cases} m(5) = 1 \\ m(1) = 1 \\ m(-1) = 2 \end{cases}$.

**Recherche d'une base de $E_5(A)$ :** puisque $m(5) = 1$, on sait que $\dim(E_5(A)) = 1$. Or on remarque que :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et donc que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \in E_5(A)$. On en déduit donc que $E_5(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

**Recherche d'une base de $E_1(A)$ :** puisque $m(1) = 1$, on sait que $\dim(E_1(A)) = 1$.

Par définition, on a : $\quad (X \in E_1(A)) \Leftrightarrow (AX = X)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow (X \in \mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{I}_4))$

On obtient alors une base de $\mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{I}_4)$ à l'aide de la résolution du système de représentation matricielle $(A - \mathrm{I}_4|0)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}}{\sim_L}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3\\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors que : $\quad \mathrm{Ker}\ (A - \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ c'est à dire que $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

**Rechercher d'une base de $E_{-1}(A)$ :** Par définition, on a : $\quad (X \in E_{-1}(A)) \Leftrightarrow (AX = -X)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow (X \in \mathrm{Ker}\ (A + \mathrm{I}_4))$

On obtient alors une base de $\mathrm{Ker}\ (A + \mathrm{I}_4)$ à l'aide de la résolution du système de représentation matricielle $(A + \mathrm{I}_4|0)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{3}L_2}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1\\ L_2 \leftarrow \frac{2}{3}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On en déduit alors que : $\quad \mathrm{Ker}\ (A + \mathrm{I}_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ c'est à dire que $E_{-1}(A) =$ $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$

Ces deux vecteurs propres étant non nuls et non colinéaires, on en déduit qu'ils forment une famille libre de $E_{-1}(A)$, et par suite une base de $E_{-1}(A)$.

Il vient alors que $\dim(E_{-1}(A)) = 2$.

**Diagonalisabilité de $A$ :** on a : $\left\{\begin{array}{l} A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})\\ \mathrm{sp}(A) = \{5, -1, 1\}\\ \dim(E_5(A)) + \dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_1(A)) = 4 \end{array}\right.$ donc par théorème la matrice $A$ est diagonalisable.

**Diagonalisation de $A$ :** en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a la relation $A = PDP^{-1}$.

**EX. 2 |** Réf. 1382

**1.** Montrer que les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -11 & 10 & -6 \\ -16 & 15 & -8 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ possèdent les mêmes valeurs propres avec le même ordre de multiplicité.

**2.** En déduire que $A$ et $B$ sont semblables en explicitant une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

**EX. 2 |** Éléments de correction | Réf. 1382

**1. Recherche des valeurs propres de** $B$ **:** on sait que : $(\lambda \in \mathrm{sp}(B)) \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_B(\lambda) = 0)$

Par définition :

$$\begin{aligned}
\chi_B(\lambda) &= \det(\lambda \mathrm{I}_3 - B) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & \\ -1 & \lambda - 2 & \\ -1 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{Dév. p/r } C_3}{=} (-1)^{3+3} \times (\lambda + 1) \times \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + 0 + 0 \\
&= (\lambda + 1)\left((\lambda - 2) \times (\lambda - 2) - (-1) \times (-1)\right) \\
&= (\lambda + 1)\left((\lambda - 2)^2 - 1\right) \\
&= (\lambda + 1)\left((\lambda - 2) - 1\right)\left((\lambda - 2) + 1\right) \\
&= (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathrm{sp}(B) = \{3, 1, -1\}$ qui sont toutes les trois de multiplicité 1.

**Recherche des valeurs propres de** $A$ **:** par théorème, on sait que : $(\lambda \in \mathrm{sp}(A)) \Leftrightarrow (A - \lambda \mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (\mathrm{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_3) \leq 2)$

**Recherche du rang de** $A - \mathrm{I}_3$ **:** un échelonnement réduit en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} -12 & 10 & -6 \\ -16 & 14 & -8 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -12 & 10 & -6 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -12 & 10 & -6 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 15L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -12 & 0 & -6 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{12}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{2}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient que $\mathrm{rg}(A - \mathrm{I}_3) = 2$ et par suite que la matrice $A - \mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et que $1 \in \mathrm{sp}(A)$.

**Recherche du rang de** $A + \mathrm{I}_3$ **:** un échelonnement réduit en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} -10 & 10 & -6 \\ -16 & 16 & -8 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{8}{5}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -10 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -10 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{15}{4}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{10}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{5}{8}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient que $\mathrm{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 2$ et par suite que la matrice $A + \mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et que $-1 \in \mathrm{sp}(A)$.

**Recherche du rang de** $A - 3\mathrm{I}_3$ **:** un échelonnement réduit en ligne donne :

$$\begin{pmatrix} -14 & 10 & -6 \\ -16 & 12 & -8 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{8}{7}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{7}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -14 & 10 & -6 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -14 & 10 & -6 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{35}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} -14 & 0 & 14 \\ 0 & \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{14}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{7}{4}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il vient que $\mathrm{rg}(A - 3\mathrm{I}_3) = 2$ et par suite que la matrice $A - 3\mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et que $3 \in \mathrm{sp}(A)$.

Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, elle possède au plus trois valeurs propres. On vient de montrer que $\{3,-1,1\} \subset \mathrm{sp}(A)$, donc on a $\mathrm{sp}(A) = \{3,-1,1\}$, et ces trois valeurs propres sont nécessairement de multiplicité 1.

2. **Caractère semblable de $A$ et $B$ :** Les deux matrices $A$ et $B$ appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et possédant chacune trois valeurs propres distinctes, par théorème, elles sont diagonalisables.

Il existe donc $(P_1,P_2) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles qu'en posant $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = P_1 D P_1^{-1}$ et $B = P_2 D P_2^{-1}$.

On en déduit donc que $B = P_2^{-1} B P_2$ et par suite que :
$$\begin{aligned} A &= P_1 D P_1 - 1 \\ &= P_1\left(P_2^{-1}BP_2\right)P_1^{-1} \\ &= \left(P_1P_2^{-1}\right)B\left(P_2P_1^{-1}\right) \\ &= \left(P_1P_2^{-1}\right)B\left(P_1P_2^{-1}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Donc en posant $P = P_1P_2^{-1}$, par produit de matrices inversibles, $P$ est bien inversible et on a $A = PBP^{-1}$, c'est à dire qe $A$ et $B$ sont semblables.

**Recherche de la matrice $P_1$ :** on sait que pour $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, on a : $(\, X \in E_\lambda(A)\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\, X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda \mathrm{I}_3)\,)$.
La recherche du rang des matrices $A - \lambda \mathrm{I}_3$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ faite par échelonnement réduit en ligne à la question précédente permet d'obtenir une base de $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda\mathrm{I}_3)$.

Il vient donc : $E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right)$

On en déduit que la matrice $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est telle que $A = P_1 D P_1^{-1}$.

**Recherche de $P_2$ :** sur le même principe que pour la matrice $A$, on procède à la recherche d'une base de $\mathrm{Ker}\,(B - \lambda \mathrm{I}_3)$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(B)$.
Un échelonnement en ligne de la matrice $B - 3\mathrm{I}_3$ donne :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite, il vient que $E_3(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Un échelonnement en ligne de la matrice $B + \mathrm{I}_3$ donne :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{8}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{3}{8}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite, il vient que $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Un échelonnement en ligne de la matrice $B - \mathrm{I}_3$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et par suite, il vient que $E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, en posant $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,il vient que $B = P_2 D P_2^{-1}$.

**Explicitation de la matrice $P$ :** par construction, on a $P = P_1 P_2^{-1}$, et il faut donc procéder à la recherche de l'inverse de la matrice $P_2$ :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, on a $P_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Finalement, il vient que :
$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EX. 3 | Éléments de correction | `Réf. 1382`

## Préparation à l'oral

EX. 3 | `Réf. 1374`

**1.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3$ et en déduire que $1$ est la seule valeur propre possible de $A$.

**2.** Montrer que la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

EX. 4 | Éléments de correction | `Réf. 1374`

**1.** Puisque $A \times \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3 \times A$, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} (A - \mathrm{I}_3)^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^{3-k} A^k \mathrm{I}_{3-k} \\ &= \binom{3}{0}(-1)^{3-0}A^0\mathrm{I}_{3-0} + \binom{3}{1}(-1)^{3-1}A^1\mathrm{I}_{3-1} + \binom{3}{2}(-1)^{3-2}A^2\mathrm{I}_{3-2} + \binom{3}{3}(-1)^{3-3}A^3\mathrm{I}_{3-3} \\ &= A^3 - 3A^2 + 3A - \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}(A-\mathrm{I}_3)^3 &= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Supposons alors que $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et soit $X \neq (0) \in E_\lambda(A)$.
On a donc $AX = \lambda X$ et par suite, $A^2X = \lambda^2 X$ et $A^3X = \lambda^3 X$.
D'où :

$$\begin{aligned}\left(A^3-3A^2+3A-\mathrm{I}_3\right)X &= A^3X-3A^2X+3AX-X\\ &= \lambda^3X-3\lambda^2X+3\lambda X-X\\ &= \left(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1\right)X\\ &= (\lambda-1)^3X\end{aligned}$$

Or puisque $A^3-3A^2+3A-\mathrm{I}_3=(0)$, on en déduit que $(\lambda-1)X=(0)$, et comme $X\neq(0)$, il vient que $(\lambda-1)^3=0$, c'est à dire que $\lambda=1$.
Par conséquent la seule valeur propre possible de $A$ est $1$.

**2.** Si la matrice $A$ était diagonalisable, comme elle ne peut avoir que 1 comme valeur propre, elle serait ainsi semblable à une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux seraient égaux à 1, c'est à dire que $A$ serait semblable à la matrice $\mathrm{I}_3$, ce qui conduitrait à $A=\mathrm{I}_3$, ce qui est absurde. Ainsi, $A$ n'est pas diagonalisable.

## Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 4 | Réf. 4596

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $A_n=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{n}&\frac{1}{n}\\-\frac{1}{n}&\frac{n+2}{n}&\frac{1}{n}\\\frac{1}{n}&-\frac{1}{n}&1\end{pmatrix}$

**1.** Montrer que $\mathrm{sp}(A)=\left\{1,1+\dfrac{1}{n}\right\}$.

**2.** La matrice $A_n$ est-elle diagonalisable ?

**3.** La matrice $A_n$ est-elle inversible ?

EX. 5 | Éléments de correction | Réf. 4596

## Pour s'occuper les jours de pluies

EX. 5 | Réf. 4117

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

et $\mathcal{E}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

**1.** Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que $(A,B,C)$ est une base de $\mathcal{E}$.

**2.** Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M,N)\in\mathcal{E},\quad M\times N\in\mathcal{E}$.

**3.** Montrer que, pour toute matrice $M$ de $\mathcal{E}$, si $M$ est inversible, alors $M^{-1}\in\mathcal{E}$.

**4.** On définir alors l'application $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{E}&\longrightarrow&\mathcal{E}\\M&\longmapsto&TMT\end{array}\right.$.

**a.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

**b.** Vérifier que $T$ est inversible et démontrer alors que $f$ est un automorphisme de $E$.

**c.** Est-ce que la matrice $T$ est diagonalisable ?

**d.** On note $F$ la matrice de $f$ dans la base $(A, B, C)$ de $\mathcal{E}$.

  **i.** Montrer que $f$ admet une valeur propre et une seulle et déterminer celle-ci.

  **ii.** $f$ est-elle diagonalisable ?

## EX. 6 | Éléments de correction | Réf. 4117

**1.** Il est immédiat que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}\,(A, B, C)$ et ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
La famille $(A, B, C)$ étant une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui est elle-même libre, est donc libre.
Par suite $(A, B, C)$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$. Elle en forme donc une base.

**2.** Soient $(M, N) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ en écrivant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne que $M \times N = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et donc que $\mathcal{E}$ est stable par produit.

**3.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ inversible. Son inverse $M^{-1}$ est donc : $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et on a directement que $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

**4.** **a.** Soient $(M_1, M_2) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.
Il vient alors que :
$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & TM_3T \\ & = & T(\lambda M_1 + M_2)T \\ & = & (\lambda TM_1 + TM_2)T \\ & = & \lambda TM_1T + TM_2T \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$
et ainsi, $f$ est linéaire.
De plus, comme par définition $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, $f$ est donc un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

**b.** $T$ étant une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, elle est inversible.
$f$ étant un endomorphisme d'un espace $\mathcal{E}$ de dimension finie égale à 3 d'après la première question, par le théorème de caractérisation des endomorphismes bijectifs, $f$ sera bijectif, si, et seulement si, $f$ est injectif, c'est à dire si son noyau est réduit au vecteur nul de $\mathcal{E}$, en l'occurrence la matrice nulle.
Soit alors $M \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Alors $TMT = (0)$. Comme $T$ est inversible, on en déduit en multipliant par $T^{-1}$ à gauche que $MT = (0)$ puis par $T^{-1}$ à droite que $M = (0)$. Ainsi, le noyau de $f$ est réduit au vecteur nul.
$f$ est donc injectif, et par théorème, $f$ est alors bijectif.

**c.** La matrice $T$ étant triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres. Ainsi, $T$ ne possède qu'une valeur propre, qui est 1. Elle ne peut être alors diagonalisable, car sinon, $T$ serait semblable à la matrice $1 \times \mathrm{I}_2$, et donc égale à la matrice identité, ce qui n'est clairement pas le cas.

**d.** **i.** On a directement que $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(A) = A + B)$, $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc que $f(B) = B$ et $f(C) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $f(C) = B + C$.

On en déduit donc que la matrice $F$ de $f$ dans la base $(A, B, C)$ de $\mathcal{E}$ est alors : $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de $F$ est par définition $\chi_\lambda(F) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - F)$.

Or ici, on a directement que :
$$\begin{array}{rcl} \chi_\lambda(F) & = & \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & \underset{\text{Dév. p/r } L_1}{=} & (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ & = & (\lambda - 1)^3 \end{array}$$

Par suite, $F$ ne possède qu'une seule valeur propre qui est 1 d'ordre de multiplicité 3, ce qui est le cas aussi pour $f$.

**ii.** La valeur propre 1 étant d'ordre de multiplicité 3, si la matrice $F$ était diagonalisable elle serait donc semblable à la matrice identité d'ordre 3, et donc compte-tenu de la définition des matrices semblables, elle serait égale à la matrice identité d'ordre 3. Ce qui n'est pas le cas. Ainsi, la matrice $F$ n'est pas diagonalisable, et par suite, $f$ non plus.