À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Parlons avenir

Exercice| [OR01] | 1

En 250 mots $\pm 10\%$, expliquer dans quel(s) champ(s) professionnel(s) vous souhaitez vous engager dans 5 ans et ce qui vous y attire, ainsi qu'identifier le(s) métier(s) que vous aspirez y exercer.

Éléments de correction

Pas de correction...

Un peu de technique

Exercice| [2198] | 2| Intégration

On désigne par I_1 et I_2 les deux intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x} \cos(2x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{t + t\,(\ln(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

(1). À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer I_1.

(2). À l'aide du changement de variable $x = \ln(t)$, calculer I_2.

Éléments de correction

(1). On effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = \cos(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = -2\sin(2x) \end{array}$$

où u et v sont donc fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$I_1 = \left[\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\underbrace{\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\,\mathrm{d}x}_{J_1}$$

Pour calculer J_1, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = \sin(2x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = 2\cos(2x) \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0;\pi]$. Il vient ainsi :

$$J_1 = \left[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} I_1 & = & \left[\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left(\left[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\,x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ & = & \left[\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\right]_0^{\pi} - 4I_1 \end{array}$$

On obient ainsi la relation : $\quad 5I_1 = \left[\mathrm{e}^{\,x}\cos(2x)\right]_0^{\pi} + 2\left[\mathrm{e}^{\,x}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$.

Or : $\left[\mathrm{e}^{x}\sin(2x)\right]_0^{\pi}=0$ et $\left[\mathrm{e}^{x}\cos(2x)\right]_0^{\pi}=\mathrm{e}^{\pi}-1$.

Par suite : $I_1=\dfrac{1}{5}\left(\mathrm{e}^{\pi}-1\right)$.

(2). Le changement de variable $x=\ln(t)$ permet d'écrire les relations : $\begin{cases} x=\ln(t) \quad \Leftrightarrow \quad t=\mathrm{e}^{x} \\ \mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ ou encore } \mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ \text{si } t=1, \text{ alors } x=0 \\ \text{si } t=\mathrm{e}, \text{ alors } x=\ln(\mathrm{e})=1 \end{cases}$.

Par suite :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}x^2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ [\arctan(x)]_0^1 & \\ &= \arctan(1)-\arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4}-0 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [2158] | 3| Calcul intégral et suite

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \end{array}\right.$.

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})}(f(x))^n\,\mathrm{d}x$.

(1).(a). Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis en étudier son signe.

(b). Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

(c). Construire alors le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

(2).(a). Justifier que, pour tout $x\in\left[0;\ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $\quad 0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{2}$.

(b). En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad 0\leq I_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\ln\left(\sqrt{3}\right)$.

(c). Quelle est alors la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

(3). Calculer I_0 et I_1.

On pourra pour cette dernière remarquer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $\quad\dfrac{x-1}{x+1}=-1+\dfrac{2x}{x+1}$,

(4). Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\quad (f(x))^2+f'(x)=1$.

(5). Calculer alors $I_{n-2}-I_n$ pour tout $n\geq 2$.

(6). Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $\quad S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}$.

(a). Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\quad S_n=I_0+I_1-I_n-I_{n+1}$.

(b). En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n$.

Éléments de correction

(1).(a). La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\times 2\mathrm{e}\,2x}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} \\ &= \frac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} \end{aligned}$$

On a clairement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{2x} > 0$ et $\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2 > 0$, donc par quotient, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b). • Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, il vient par quotient que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -1$.

• En écrivant $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}\left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)}{\mathrm{e}^{2x}\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}}}$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} = +\infty$, il vient $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

(c). Le tableau de variation de f est ainsi le suivant :

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$-1 \nearrow 1$

(2).(a). La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur l'intervalle $\left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$.
Par suite, pour tout $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $f(0) \leq f(x) \leq f\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right)$.
Or on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2\times\ln\left(\sqrt{3}\right)} &= \mathrm{e}^{2\times\frac{1}{2}\ln(3)} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(3)} \\ &= 3 \end{aligned}.$$
Ainsi, $f\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$, d'où l'encadrement souhaité.

(b). On a : $x \in \left[0; \ln\left(\sqrt{3}\right)\right]$, $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$
Ainsi, en élevant à la puissance n cette inégalité et tout étant positif, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0; ()\sqrt{3},\right], 0 \leq (f(x))^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} 0 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} (f(x))^n \,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x$$

Or $\displaystyle\int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} 0\,\mathrm{d}x = 0$ et
$$\begin{aligned} \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \ln\left(\sqrt{3}\right) \end{aligned}.$$
D'où l'inégalité demandée.

(c). Puisque $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, on a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le théorème d'encadrement des limites, il vient $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

(3). • Par définition :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} (f(x))^0 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \mathrm{d}x \\ &= \ln\left(\sqrt{3}\right) \end{aligned}.$$

• Par définition :
$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{(\ln)\sqrt{3},} (f(x))^1 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\ln\left(\sqrt{3}\right)} \left(-1 + \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right) \mathrm{d}x \end{aligned}.$$

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(\sqrt{3})}\left(-1+\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}\right)\mathrm{d}x &= \left[-x+\ln\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\right]_0^{\ln(\sqrt{3})}\\ &= \left(-\ln(\sqrt{3})+\ln\left(1+\mathrm{e}^{2\times\ln(\sqrt{3})}\right)\right)-\left(-0+\ln\left(1+\mathrm{e}^{2\times 0}\right)\right)\\ &= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

(4). Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $(f(x))^2=\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{2x}+1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$.

Ainsi :
$$\begin{aligned}(f(x))^2+f'(x) &= \frac{\mathrm{e}^{4x}-2\mathrm{e}^{2x}+1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}+\frac{4\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{4x}+2\mathrm{e}^{2x}+1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}\\ &= \frac{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}\\ &= 1\end{aligned}$$

(5). Soit $n\geq 2$. On a :
$$\begin{aligned}I_{n-2}-I_n &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})}\left((f(x))^{n-2}-(f(x))^n\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})}(f(x))^{n-2}\left(1-(f(x))^2\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\ln(\sqrt{3})}f'(x)\times(f(x))^{n-2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{n-1}(f(x))^{n-1}\right]_0^{\ln(\sqrt{3})}\\ &= \frac{1}{(n-1)2^{n-1}}\end{aligned}$$

(6).(a). De la question précédente, il vient $I_{k-1}-I_{k+1}=\dfrac{1}{k2^k}$

On a directement :
$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(I_{k-1}-I_{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}I_{k-1}-\sum_{k=1}^{n}I_{k+1}\end{aligned}$$

En effectuant dans chaque somme un changement d'indice, il viendra : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}I_k-\sum_{k=2}^{n+1}I_k$, ce qui amènera $S_n=I_0+I_1-I_n-I_{n+1}$.

(b). Par suite, puisque $I_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, il viendra simplement $S_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}I_0+I_1=\ln(2)$.