Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . .**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Suites et matrices

Dans tout ce problème on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ données par les relations suivantes :

$$(\star) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases} \end{cases}$$

L'objet de ce problème est de déterminer une expression des termes généraux de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis d'en étudier la limite.

Partie A | Préliminaire technique

On désigne par P et D les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Q1. Justifier que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

Q2. Sans démonstration, donner une expression de D^n en fonction de n.

Q3. On désigne par A la matrice définie par $A = PDP^{-1}$ que l'on ne demande pas de calculer.

Montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Q4. Déterminer alors l'expression de A^n en fonction de n.

Q5. Vérifier qu'en appliquant la formule précédente pour $n = 1$, on trouve que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Partie B | Traduction matricielle du problème initial

On désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Q6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

Q7. Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.

Q8. Donner alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Q9. Déduire de ce qui précède la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème n° 2 | Étude d'une suite de matrices | Extrait & Adapté ATS 2022

Dans tout cet exercice, on désigne par A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A | Recherche d'une matrice semblable à la matrice A

Dans tout ce qui suit, on considère la matrice P donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice T donnée par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q10. La matrice T est-elle inversible ?

Q11. Montrer que $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis calculer $P^3 - 2P^2 + 2P - \mathrm{I}_3$.

Q12. Déduire de ce qui précède que P est inversible, et expliciter son inverse.

Q13. Calculer AP et PT. Exprimer alors A en fonction de P, T et P^{-1}.

Q14. En déduire que la matrice A est inversible.

Partie B | Construction d'une suite de matrices

On définit alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par les relations : $\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & A \\ \forall n \in \mathbb{N},\, X_{n+1} & = & \dfrac{1}{n+1}\,(X_n)^2 + 2\mathrm{I}_3 - A \end{array} \right.$

Q15. Calculer $(A - \mathrm{I}_3)^2$.

Q16. À l'aide de la question précédente, retrouver le caractère inversible de A et donner alors A^{-1}.

Q17. Déterminer deux couples de réels (α_0, β_0) et (α_1, β_1) tels que $X_0 = \alpha_0 \mathrm{I}_3 + \beta_0 A$ et $X_1 = \alpha_1 \mathrm{I}_3 + \beta_1 A$.

Q18. Démontrer qu'il existe deux suites de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, X_n = \alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n A$$

Q19. Déterminer les valeurs des couples (α_2, β_2) et (α_3, β_3) définis par la question précédente.

Q20. Conjecturer une expression de α_n et de β_n en fonction de n, puis donner l'expression de X_n en fonction de n.

Partie C | Inversibilité des matrices X_n

On se propose dans cette partie d'étudier l'inversibilité des matrices X_n construites dans la partie précédente.

Q21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rang de la matrice $n\mathrm{I}_3 + A$ en fonction de n.

Q22. La matrice X_n est-elle inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Q23. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, X_n = P\,(\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T)\,P^{-1}$.

Q24. En déduire de nouveau que la matrice X_n est inversible et expliciter son inverse en fonction de P, P^{-1} et $\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T$.

Partie D | Calcul des puissances de X_1

On se propose dans cette question de calculer les puissances de la matrice X_1 où l'on rappelle que $X_1 = \mathrm{I}_3 + A$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Q25. Montrer que la connaissance des puissances de la matrice $\mathrm{I}_3 + T$ suffit pour déterminer les puissances de la matrice X_1.

Q26. Déterminer une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = \mathrm{I}_3 + N$, puis démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, T^n = \mathrm{I}_3 + nN$.

Q27. Exprimer alors $(\mathrm{I}_3 + T)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Problème 3 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et matrices

Dans tout cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Pour simplifier les notations qui vont suivre, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, on désignera par X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Par exemple pour $e_2 = (0,1,0)$, on notera $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou pour $x = (1,-2,4)$ on notera $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Partie A | Noyau de la matrice A

On considère le sous-ensemble K de $\mathbb{R}^3$ défini par : $K = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ AX = (0)\}$

Q28. Le vecteur $v = (1,2,3)$ appartient-il à K ?

Q29. Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q30. Démontrer que $K = \mathrm{Vect}\,((1,2,-3))$.

Partie B | Image de la matrice A

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$S = \{b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ le système de représentation matricielle } (A|B) \text{ est compatible}\}$$

Q31. Calculer AE_1 puis en déduire trois vecteurs de S.

Q32. Soient $b = (b_1, b_2, b_3)$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ tels que $AX = B$ et $AY = C$.

Montrer que le système de représentation matricielle $(A|\lambda B + C)$ est compatible.

Q33. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q34. Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Étudier la compatibilité du système de représentation matricielle $(A|B)$, en explicitant notamment les équations de compatibilité de ce dernier.

Q35. Montrer alors que S est un plan vectoriel dont on déterminera une famille génératrice.

Partie C | Éléments propres de la matrice A

On désigne par $\mathrm{sp}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ A - \lambda \mathrm{I}_3 \text{ n'est pas inversible}\}$.

Q36. Montrer que $0 \in \mathrm{sp}(A)$.

Q37. On suppose dans cette question que λ est un réel non nul.

Montrer que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ est de rang 3 si, et seulement si, $\lambda^2 - \lambda - 4 \neq 0$.

Q38. Déterminer alors l'ensemble $\mathrm{sp}(A)$.