À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Extrait ENS 2013 Filière BL

P désigne la fonction polynôme donnée par $P : x \longmapsto x^3 - x^2 - 7x + 11$ et A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

On note par convention $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = A^3 - A^2 - 7A + 11\mathrm{I}_3$.

Partie A | Lien spectre de A et racines de P

Q1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $P(A)$ est la matrice nulle.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 9 \\ 7 & -8 & -5 \\ 12 & -26 & -11 \end{pmatrix}$ ce qui amèra à $P(A) = (0)$.

Q2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et A^2.

Éléments de correction

De la relation $P(A) = (0)$, il vient que $A^3 - A^2 - 7A = -11\mathrm{I}_3$ ce qui donne que $A\left(A^2 - A - 7\mathrm{I}_3\right) = -11\mathrm{I}_3$ et par conséquent que $A \times \left(-\dfrac{1}{11}\left(A^2 - A - 7\mathrm{I}_3\right)\right) = \mathrm{I}_3$. Ainsi, la matrice A est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse $A^{-1} = -\dfrac{1}{11}\left(A^2 - A - 7\mathrm{I}_3\right)$.

Q3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et V un vecteur propre non nul associé.

Calculer $P(A)V$ de deux manières pour en déduire que $P(\lambda) = 0$.

Éléments de correction

Puisque $P(A) = (0)$, il est immédiat que $P(A)V = (0)V = (0)$.
Par ailleurs, puisque $AV = \lambda V$ car $V \in E_\lambda(A)$, il vient que $A^2V = \lambda^2 V$ et $A^3 = \lambda^3 V$, et par suite que $P(A)V = \left(\lambda^3 - \lambda^2 - 7\lambda + 11\right)V$ c'est à dire que l'on a $P(\lambda)V = (0)$.
Finalement, comme V est un vecteur propre non nul, il vient que l'on a $P(\lambda) = 0$.

Partie B | Éléments propres de A

On désigne par L_λ le système de représentation matricielle $A - \lambda\mathrm{I}_3$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q4. Résoudre L_2.

Éléments de correction

Par construction, la matrice $A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ et un échelonnement en lignes du système représentation matricielle $(A - 2\mathrm{I}_3|0)$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Le système est de rang 3. Ainsi L_2 est un système 3×3 homogène de rang 3, donc par théorème, il admet une unique solution, qui est clairement la solution triviale $(0, 0, 0)$.

Q5. En supposant $\lambda \neq 2$, montrer que L_λ est équivalent en lignes au système de représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \dfrac{\lambda - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{cP(\lambda)}{2-\lambda} & 0 \end{array}\right)$$

où c est une constante à déterminer.

Éléments de correction

Un échelonnement en lignes donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 & 0 \\ 2-\lambda & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (2-\lambda)L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & -2\lambda + 4 & -1+\lambda & 0 \\ 0 & 6-4\lambda & 4+\lambda-\lambda^2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 0 \\ 0 & 6-4\lambda & 4+\lambda-\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{6-4\lambda}{2-\lambda} L_2 \\ \textbf{car } 2-\lambda \neq 0}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3-\lambda^2-7\lambda+11}{2-\lambda} & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P(\lambda)}{2-\lambda} & 0 \end{array}\right)$$

et on a trivialement que $c = 1$.

Q6. Montrer que si λ est racine de P, alors L_λ admet des solutions non nulles.

En conclure que l'ensemble des valeurs propres de A est l'ensemble des racines de P.

Éléments de correction

Si λ est racine de P, on a alors que : $L_\lambda \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \dfrac{\lambda-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Comme $\lambda \neq 2$, ce système est un système homogène de rang 2, et on pourrait poursuivre l'échelonnement pour obtenir que $L_\lambda \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{\lambda-1}{2(2-\lambda)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ où α est un réel qui dépend de λ, ce qui assure ensuite l'existence de solutions

non nulles : $\text{Vect}\left(\left(-\alpha, -\dfrac{\lambda-1}{2\,(2-\lambda)}, 1\right)\right)$.
Par conséquent, il existe un vecteur V non nul tel que $(A-\lambda \mathrm{I}_3)\,V = 0$ c'est à dire $AV = \lambda V$, ce qui assure le fait que λ est valeur propre de A.
Ainsi, on vient de montrer que si $P(\lambda) = 0$, alors λ est valeur propre de A.
La question **Q2** a permis détablir que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $P(\lambda) = 0$.
Par conséquent, on vient de montrer l'équivalence : $\quad (\lambda \in \mathrm{Sp}(A)) \quad \Leftrightarrow \quad (P(\lambda) = 0)$.

Q7. Déterminer le cardinal de l'ensemble des racines réelles de P, puis des racines complexes de P.

Éléments de correction

Une étude des variations de P donne que :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{22}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{22}}{3}$		$+\infty$
Signe de $P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de P	$-\infty$	$\nearrow$	$P\left(\frac{1-\sqrt{22}}{2}\right) > 0$	$\searrow$	$P\left(\frac{1+\sqrt{22}}{2}\right) > 0$	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que l'équation $P(x) = 0$ ne peut avoir de solutions que sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1-\sqrt{22}}{2}\right[$ compte-tenu des variations de P. La fonction P étant continue strictement croissante sur cet intervalle, puisque $P(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty < 0$ et $P\left(\frac{1-\sqrt{22}}{2}\right) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement croissantes assurent l'existence et l'unicité d'une telle solution notée α.
Par suite, P se factorise en $P(x) = (x-\alpha) \times Q(x)$ où Q est un polynôme de degré 2 à discriminant strictement négatif, c'est à dire qui possède deux racines complexes conjuguées.
Par conséquent, P possède une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

Q8. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Éléments de correction

A ne possédant qu'une seule valeur propre réelle α, si cette dernière était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors la matrice A serait semblable à la matrice $\alpha \mathrm{I}_3$ et compte-tenu des formules de changement de bases, exactement égale à $\alpha \mathrm{I}_3$, et serait donc diagonale, ce qui n'est clairement pas le cas.

Problème n° 2 | Extrait ENS 2020 Filière BL

Dans tout ce problème, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A | Préliminaire technique

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on rappelle que l'on note $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$ et on désigne par φ la fonction $\varphi : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

Q9. Exprimer de deux façons différentes les parties réelles et imaginaire de $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2 &= \cos^2(\theta) + 2\mathrm{i}\,\cos(\theta)\sin(\theta) + \mathrm{i}^{\,2}\sin^2(\theta)\\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2\mathrm{i}\,\cos(\theta)\sin(\theta)\end{aligned}$$
ce qui donne que $\mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2\right) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2\right) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$.
On sait de plus que $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2 = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2\theta}$ ce qui donne que $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2\theta}\right)^2 = \underbrace{\cos(2\theta)}_{=\mathrm{Re}\left(\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2\right)} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(2\theta)}_{\mathrm{Im}\left(\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2\right)}$.

Q10. En déduire que : $\quad (\cos(\theta))^2 = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Éléments de correction

Par identification des parties réelles de $\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta}\right)^2$, il vient que $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta)$ et par suite, puisque $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ on trouve que $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

Q11. Quel est le domaine de définition de φ ?

Éléments de correction

L'expression $\varphi(x)$ n'a de sens que si $1-x^2 \geq 0$, ce qui compte-tenu du fait que cette dernière est une fonction polynôme de degré 2 qui s'annule en -1 et 1 et dont le coefficient du terme de degré 2 est strictement négatif, que cela est le cas uniquement sur l'intervalle $[-1;1]$.
Ainsi, φ est définie sur $[-1;1]$.

Q12. Montrer que le graphe de φ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Éléments de correction

Le domaine $\mathcal{D}_\varphi$ de définition de φ est clairement symétrique par rapport à 0.
Par ailleurs, on a : $$\begin{aligned}\forall x \in \mathcal{D}_\varphi,\ \varphi(-x) &= \sqrt{1-(-x)^2}\\ &= \sqrt{1-x^2}\\ &= \varphi(x)\end{aligned}$$
ce aui assure que φ est paire, et donc que sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Q13. Justifier que φ est dérivable sur $]-1;1[$, puis calculer la limite de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers -1.

Éléments de correction

La fonction $x \longmapsto 1-x^2$ est clairement dérivable sur $[-1;1]$, s'annule en -1 et 1, et est bien à valeurs positives sur ce dernier.
La fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Ainsi, par composition, la fonction φ est dérivable sur $]-1;1[$.
Par ailleurs, un calcul direct donne que : $\quad \forall x \in\,]-1;1[\,,\ \varphi'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
et il est immédiat que $\varphi'(x)$ est du signe de $-x$ sur $]-1;1[$.

Il est clair que $\sqrt{1-x^2} \underset{x \to -1}{\longrightarrow} 0$ avec $\sqrt{1-x^2} \geq 0$, ce qui donne par quotient que $\varphi'(x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} -\infty$.

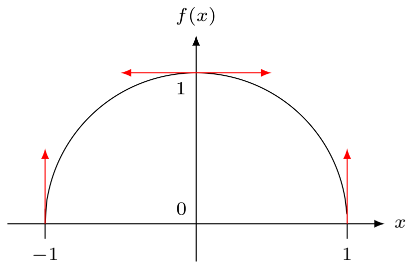
Q14. Construire le graphe de φ dans $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$ en faisant apparaître les informations obtenues aux questions précédentes.

Éléments de correction

La question précédente permet d'obtenir les variations de φ sur $[-1;1]$.

x	-1		0		1
Signe de $\varphi'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
Variations de φ	0	↗	1	↘	0

Puisque $\varphi'(x) \underset{x \to -1}{\longrightarrow} +\infty$, la courbe représentative de φ présente une tangente verticale au point d'abscisse -1 et par symétrie au point d'abscisse 1. De même elle admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.



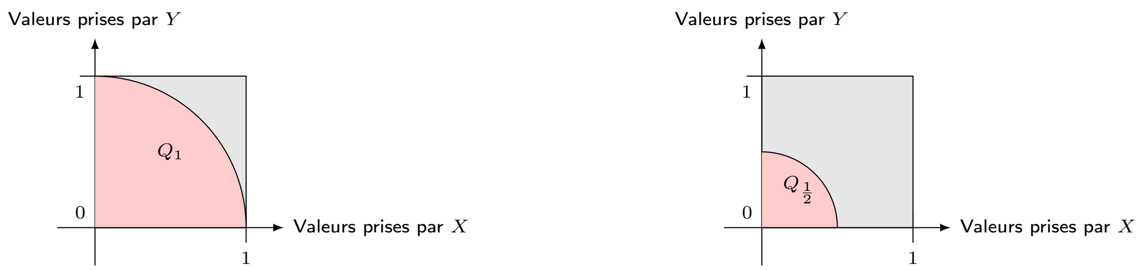
Partie B | Étude d'un couple de variables aléatoires à densité

Dans tout ce qui suit, X et Y désignent deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme dans $]0;1[$. On admet que, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$, la probabilité de l'événement $[(X,Y) \in A]$ est donnée par l'aire de l'ensemble $A \cap [0;1]^2$.

Pour tout réel positif r, on définit l'ensemble $\mathcal{Q}_r = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq r^2\right\}$.

Q15. Sur un même graphique, construire $\mathcal{Q}_{\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{Q}_1$.

Éléments de correction



Q16. Que vaut $\mathbb{P}\left([(X,Y) \in \mathcal{Q}_1]\right)$?

Éléments de correction

Il s'agit donc de déterminer l'aire d'un quart de cercle de rayon 1…et il vient donc que $\mathbb{P}\left([(X,Y) \in \mathcal{Q}_1]\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Q17. Justifier que, pour tout $t \in [0;1]$, $\mathbb{P}([(X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \text{ et } 0 \leq X \leq t]) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Éléments de correction

L'événement $[(X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \text{ et } 0 \leq X \leq t]$ est exactement $\left[0 \leq X \leq t \text{ et } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X^2+Y^2 \leq 1\right]$ c'est à dire $\left[0 \leq X \leq t \text{ et } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } Y \leq \sqrt{1-X^2}\right]$ ce qui géométriquement correspond au domaine situé entre les droites d'équations $x=0$ et $x=y$, et situé entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de φ.

L'aire de ce domaine est donné, en unité d'aires, par $\displaystyle\int_0^t \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, ce qui donne la probabilité cherchée.

Q18. À l'aide du changement de variable $x = \sin(\theta)$, montrer que : $\mathbb{P}\left(\left[(X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \text{ et } 0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$

Éléments de correction

Le changement de variables proposé donne les relations $\begin{cases} x=0 & \leftrightarrow \quad \theta = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} & \leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \\ x = \sin(\theta) & \leftrightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

et on obtient alors que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \times \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\theta)\,|\cos(\theta)|\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\theta)\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}
\end{aligned}$$

Q19. Les événements $[(X,Y) \in \mathcal{Q}_1]$ et $\left[0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right]$ sont-ils indépendants ?

Éléments de correction

Ces deux événements le seront si l'on a bien que :

$$\underbrace{\mathbb{P}([(X,Y) \in \mathcal{Q}_1])}_{=\frac{\pi}{4}} \times \underbrace{\mathbb{P}\left(\left[0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right]\right)}_{=\frac{1}{2}} = \underbrace{\mathbb{P}\left(\left[(X,Y) \in \mathcal{Q}_1 \text{ et } 0 \leq X \leq \frac{1}{2}\right]\right)}_{=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}}$$

ce qui n'est clairement pas le cas.

Partie C | Obtention d'une fonction de répartition

Dans tout ce qui suit, on désigne par D la variable aléatoire $D = \sqrt{X^2+Y^2}$ et pour tout $t > 0$, on définit alors $I(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{t^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On souhaite expliciter la fonction $F_D : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}([D \leq t]) \end{array} \right.$.

Q20. Quel est l'ensemble des valeurs que peut prendre D ?

Éléments de correction

Puisque $(X, Y) \in [0;1]^2$ par définition de ces deux variables aléatoires, il vient que $D \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Q21. Trouver l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $F_D(t) = 0$, puis celui pour lesquelles $F_D(t) = 1$.

Éléments de correction

Puisque D ne prend ses valeurs que dans $\left[0;\sqrt{2}\right]$, il vient que : $F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad \sqrt{2} \leq t \end{cases}$

Q22. Montrer que $I(t) = t^2 I(1)$.

Éléments de correction

Il vient directement que :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^t \sqrt{t^2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t |t|\,\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t t\sqrt{1-\left(\frac{x}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$ qui donne les relations $\begin{cases} x = 0 & \leftrightarrow & u = 0 \\ x = t & \leftrightarrow & u = 1 \\ u = \dfrac{x}{t} & \leftrightarrow & \mathrm{d}u = \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}x \end{cases}$

et par suite il vient :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_0^1 t\sqrt{1-u^2} \times t\,\mathrm{d}u \\ &= t^2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= t^2 I(1) \end{aligned}$$

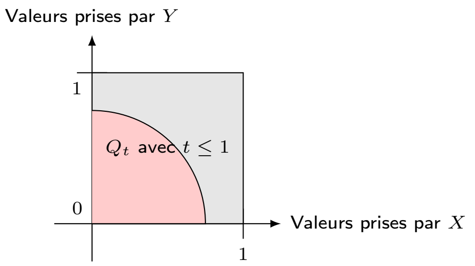
Q23. En déduire une expression de $F_D(t)$ lorsque $t \in [0;1]$.

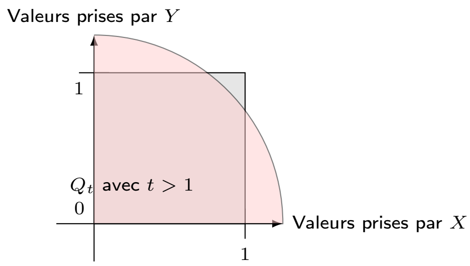
Éléments de correction

Comme $I(1) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ et que graphiquement il s'agit de l'aire, exprimée en unités d'aires, d'un quart de cercle, il vient que $I(1) = \dfrac{\pi}{4}$.
Soit $t \in [0;1]$ fix
'e.
Par définition de D, on a $\mathbb{P}([D \leq t]) = \mathbb{P}([(X,Y) \in \mathcal{Q}_t])$.
En reprenant les raisonnements faits précédemment, l'aire de $\mathcal{Q}_t$ correspond à l'aire située sur la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \sqrt{t^2 - x^2}$ et au-dessus de l'axe des abscisses, et compris entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$. On en déduit donc que $F_D(t) = I(t)$ et par suite $F_D(t) = \dfrac{\pi t^2}{4}$.

Q24. Pourquoi ne peut-on pas étendre ce raisonnement pour $t > 1$?

Éléments de correction





Lorsque $t > 1$, le domaine $\mathcal{Q}_t$ « sort » sort du carré unité dans lequel (X, Y) prend ses valeurs, et il ne faut alors considérer que la portion de $\mathcal{Q}_t$ qui est inclus dans ce dernier, et on ne peut donc se contenter d'un simple calcul d'aire d'une portion de cercle qui sera donnée par le calcul de $I(t)$.

Q25. Quelle intégrale faudrait-il calculer (ce que l'on ne demande pas de faire) pour obtenir les valeurs $F_D(t)$ manquantes ?

Éléments de correction

Il faudrait dans ce cas calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^t \min\left(1, \sqrt{t^2 - x^2}\right) \mathrm{d}t$.

Q26. Montrer que D ne suit pas une loi uniforme.

Éléments de correction

La fonction de répartition de la loi uniforme sur son support $\left[0; \sqrt{2}\right]$ vaut $\sqrt{2}$ en $\sqrt{2}$ ce qui n'est pas le cas de F_D qui vaut 1, ce qui donne que D ne suit pas la loi uniforme sur $\left[0; \sqrt{2}\right]$.

Problème n° 3 | Extrait ENS 2017 Filière BL

Soit $n \geq 1$ et $a_0, \ldots, a_{n-1}$ des réels. On note P la fonction polynôme donnée par :

$$P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$$

La matrice $C_P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ est appelée matrice compagnon de P.

On note $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ où l'on rappelle, à la représentation près que $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Partie A | Quelques exemples

Q27. Donner la matrice compagnon C_Q du polynôme $Q : x \longmapsto (x-2)^2 (x+1)$.

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\quad Q : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 4$

ce qui donne que : $C_Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q28. Donner le polynôme R dont la matrice compagnon est $C_R = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

On obtient directement que $R : x \longmapsto x^2 + 2x - 3$.

Q29. Quelles sont les racines de R ? Quelles sont les valeurs propres de C_R ? Que constatez-vous ?

Éléments de correction

R est une fonction polynôme de degré 2 de discriminant 16 et donc de racines 1 et -3.
Par ailleurs, les matrices $C_R - 1\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $C_R + 3\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont clairement de rang 1 donc non inversibles, et par suite 1 et 3 sont bien valeurs propres de R et donc $\{1, -3\} \subset \mathrm{Sp}(R)$ et comme $R \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, elle ne peut avoir plus de 2 valeurs propres ce qui assure que $\mathrm{sp}(R) = \{1, -3\}$.

Q30. La matrice C_R est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Éléments de correction

$C_R \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes, donc par théorème elle est diagonalisable.

Partie B | Quelques résultats sur la matrice compagnon

Q31. Déterminer le rang de C_P et la dimension du noyau de C_P.

On pourra distinguer le cas $a_0 = 0$ et $a_0 \neq 0$.

Éléments de correction

Si $a_0 = 0$: on a clairement que $C_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ et donc le rang de C_p est au plus $n-1$.

En effectuant la succession de permutations de lignes qui permet de placer L_1 sur la dernière ligne et de « remonter » toutes les autres lignes d'une ligne, on a $C_P \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où l'on obtient alors que $\mathrm{rg}\,(C_P) = n-1$ puisque les $n-1$ termes diagonaux de cette dernière matrice équivalente en ligne à C_P sont tous non nuls.
Le théorème du rang donne alors que $\dim\left(\mathrm{Ker}\,(C_P)\right) = 1$.

Si $a_0 \neq 0$: sur le même principe que précédemment, on obtient que $C_P \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \end{pmatrix}$ et par le même argument que $\mathrm{rg}\,(C_P) = n$ et on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(C_P)) = 0$.

Q32. Justifier que 0 est valeur propre de C_P si, et seulement si, $P(0) = 0$.

Éléments de correction

On sait que : $(0 \in \mathrm{Sp}\,(C_P)) \quad \Leftrightarrow \quad (C_P \notin \mathrm{GL}_n\,(\mathbb{R}))$
On a vu à la question précédente que C_P n'est pas inversible si, et seulement si $a_0 = 0$. Or on a que $P(0) = a_0$, et ainsi, C_P n'est pas inversible si, et seulement si, $P(0) = 0$.

Q33. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\,(C_P - \lambda \mathrm{I}_n)) \leq 1$.

Éléments de correction

On a tout d'abord que $C_p - \lambda \mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -\lambda & 0 & -a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & & 1 & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$.
Les $n-1$ dernières lignes forment clairement une famille libre, et donc le rang de $C_P - \lambda \mathrm{I}_n$ est au moins égal à $n-1$ et par suite par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\,(C_P - \lambda \mathrm{I}_n)) \leq 1$.

Partie C | Polynôme annulateur associé à P

L'objet de cette partie est de démontrer que la matrice M_P donnée par $M_P = a_0 \mathrm{I}_n + a_1 C_P + \ldots + a_{n-1} C_p^{n-1} + C_p^n$.

Q34. Vérifier M_R est la matrice nulle où R est le polynôme défini dans la partie précédente.

Éléments de correction

On s'inéresse donc à la matrice $M_R = -3\mathrm{I}_2 + 2C_R + C_R^2$ où un calcul direct donne $C_R^2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ puis que $-3\mathrm{I}_2 + 2C_R + C_R^2 = (0)$.

Q35. L'application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & a_0 \mathrm{I}_n + a_1 A + \ldots + a_{n_1} A^{n-1} + A^n \end{array} \right.$ est-elle une application linéaire ?

Éléments de correction

En général non, car pour $a_0 \neq 0$, on a $\varphi((0)) = a_0 \mathrm{I}_n \neq (0)$ ce qui contredit le fait que l'image du vecteur nul par une application linéaire doit être le vecteur nul.

Q36. Montrer que : $\forall k \in [\![2; n]\!]\,,\ E_k = C_P^{k-1} E_1$.

Éléments de correction

Tout d'abord on a $C_p = N_P + D_P$ avec $N_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D_P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On remarque alors que $N_P E_1 = E_2$ et $D_P E_1 = (0)$ d'où $C_P E_1 = E_2$, et sur le même principe, on obtient que $C_P E_k = E_{k+1}$ avec $k \in [\![1; n-1]\!]$, et par récurrence on établierait que $E_k = C_P^{k-1} E_1$.

Q37. En déduire qu'il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\left(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X\right)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.

Éléments de correction

En prenant $X = E_1$, la famille $\left(X, C_P X, \dots, C_P^{n-1} X\right)$ est exactement la famille $(E_1, \dots, E_n)$ qui est une base de $\mathbb{R}^n$.

Q38. Montrer que $M_P E_1 = (0)$

Éléments de correction

Par définition : $M_P E_1 = a_0 E_1 + a_1 C_P E_1 + \dots + a_{n-1} C_P^{n-1} E_1 + C_P^n E_1$ et donc $M_P E_1 = a_0 E_1 + a_1 E_2 + \dots + a_{n-1} E_n + C_P E_n$.

Or $C_P E_n = \begin{pmatrix} -a_0 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$ donc $M_P E_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_0 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix} = (0)$.

Q39. Montrer que la matrice M_P est la matrice nulle.

Éléments de correction

Les matrices M_P et C_p^k commutant, on peut donc montrer que $M_P E_k = C_P^{k-1} M_P E_1 = (0)$ ce qui assure que les images par M_P des vecteurs des vecteurs de la famille $(E_1, \dots, E_N)$ sont tous nuls, et donc que M_P est la matrice de l'application nulle, et par suite que $M_P = 0$.

Partie D | Éléments propres de M_P

On se propose dans cette partie d'obtenir les éléments propres de M_P.

Q40. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C_P et $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé.

Montrer que $M_P X = P(\lambda) X$, puis en déduire que λ est racine de P.

Éléments de correction

Puisque $C_P X = \lambda X$, on montrerait par récurrence que $C_P^k X = \lambda^k X$, ce qui amènerait alors que $M_P X = P(\lambda) X$ et que $P(\lambda) = 0$ sur le même principe qu'à la question **Q3**.

Q41. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(\lambda) = 0$.

On suppose **uniquement dans cette question** qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $C_P X = \lambda X$.

Montrer que : $\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ x_{n-k} = \left(a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \dots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^n\right) x_n$

Éléments de correction

La relation $C_P X = \lambda X$ donne que $\begin{cases} -a_0 x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 - a_1 x_n & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} - a_{n-1} x_n & = & \lambda x_n \end{cases}$ ou encore que

$$\begin{cases} x_{n-1} & = & (a_{n-1} + \lambda) x_n \\ x_{n-2} & = & \underbrace{\lambda \underbrace{x_{n-1}}_{=(a_{n-1}+\lambda)x_n} + a_{n-2} x_n}_{=(a_{n-2}+\lambda a_{n-1}+\lambda^2)x_n} \\ & \vdots & \\ x_1 & = & \left(a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda^{n-2} a_{n-1} + \lambda^{n-1}\right) x_n \\ 0 & = & \left(a_0 + a_1 \lambda + \ldots + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \lambda^n\right) x_n \end{cases}$$

et on a donc la relation attendue.

Q42. En déduire que si λ est racine de P, alors λ est valeur propre de C_P et exhiber un vecteur propre associé.

Éléments de correction

Puisque $P(\lambda) = 0$ par hypothèse, la dernière relatione est vraie, et par suite le système représentatin matricielle $(C_P - \lambda \mathrm{I}_n | 0)$ admet une solution non nulle $X = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 + \ldots + \lambda^{n-2} a_{n-1} + \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-k} + \lambda a_{n-k+1} + \ldots + \lambda^{k-1} a_{n-1} + \lambda^k \\ \vdots \\ a_{n-1} + \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est alors un vecteur propre de C_P associé à la valeur propre λ.

Q43. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ des nombres réels tous distincts et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ des entiers positifs ou nuls. On définit le polynôme S par $S(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{\alpha_i}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice C_S de S soit diagonalisable.

Éléments de correction

De ce qui précède, les valeurs propres de C_S sont les racines de S, et chaque sous-espace propre de C_S est de dimension 1.
Le théorème de caractérisation de diagonalisibilié par la somme des dimensions des sous-espaces propres assure alors que C_S est diagonalisable si et seulement si S admet n racines simples.

Q44. Lorsque $n \geq 2$n, donner un exemple de matrice de taille $n \times n$ non diagonalisable.

Éléments de correction

La matrice N_P précédemment rencontrée et correspondant au polynôme X^n, n'est pas diagonalisable puisque 0 est sa seule racine et qu'elle est de multiplicité n.