À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Suites et matrices

Dans tout ce problème on désigne par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ données par les relations suivantes :

$$(\star) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases} \end{cases}$$

L'objet de ce problème est de déterminer une expression des termes généraux de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis d'en étudier la limite.

Partie A | Préliminaire technique

On désigne par P et D les matrices suivantes : $P = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Q1. Justifier que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

Éléments de correction

Puisque $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, par théorème, on sait que : $\quad (P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) \quad \Leftrightarrow \quad (\det(P) \neq 0)$

Or ici on a clairement que :

$$\begin{aligned} \det(P) &= 3 \times 3 - 4 \times (-3) \\ &= 9 + 12 \\ &= 21 \end{aligned}$$

et donc on a $\det(P) \neq 0$, ce qui assure que P est inversible.

Par ailleurs, la formule donnant l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ permet d'écrire que : $\quad P^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Q2. Sans démonstration, donner une expression de D^n en fonction de n.

Éléments de correction

On peut montrer par récurrence sur l'entier n que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

Q3. On désigne par A la matrice définie par $A = PDP^{-1}$ <u>que l'on ne demande pas de calculer</u>.

Montrer par récurrence sur l'entier n que l'on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $A^0 = \mathrm{I}_2$ par convention, et il est immédiat que : $\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_2P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_2 \end{aligned}$

et ainsi, on a bien $A^0 = PD^0P^{-1}$ ce qui est exactement $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $A^n = PDP^{-1}$.

Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition : $A^{n+1} = A^n \times A$.

Par hypothèse de récurrence et par définition de A, il vient : $A^{n+1} = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1}$

Par suite, on a : $\begin{aligned} A^{n+1} &= D^nP^{-1} \times PDP^{-1} \\ &= PD^n\mathrm{I}_2DP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Q4. Déterminer alors l'expression de A^n en fonction de n.

Éléments de correction

D'après la question précdente, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ A^n &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 3 & -3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 4 & 3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q5. Vérifier qu'en appliquant la formule précédente pour $n = 1$, on trouve que $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3-\frac{2}{3} & 3+\frac{1}{2} \\ 4+\frac{2}{3} & 4-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{7}{2} \\ \frac{14}{3} & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et en multipliant tous les coefficients par $\frac{1}{7}$, il vient que : $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ce qui est le résultat attendu.

Partie B | Traduction matricielle du problème initial

On désigne par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Q6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

Éléments de correction

Par définition de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$.

Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ AX_n &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}\\ &= X_{n+1}\end{aligned}$$

Q7. Démontrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $X_n = A^n X_0$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

- **Initialisation :** par convention $A^0 = \mathrm{I}_2$, et donc : $$\begin{aligned} A^0X_0 &= \mathrm{I}_2X_0 \\ &= X_0 \end{aligned}$$
  ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $X_n = A^n X_0$.
  Montrons alors, que sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n)$.
  Par définition de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $X_{n+1}AX_n$.
  Donc par hypothèse de récurrence, il vient : $X_{n+1} = A \times A^n X_0$
  ce qui donne directement que : $X_{n+1} = A^{n+1}X_0$
  ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.
- **Conclusion :** la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q8. Donner alors les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

Éléments de correction

Puisque par définition $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'après ce qui précède :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ X_n &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n & 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3+4\left(-\frac{1}{6}\right)^n + 3-3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 4-4\left(-\frac{1}{6}\right)^n + 4+3\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6+\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ 8-\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{7}\left(6 + \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)$ et $v_n = \frac{1}{7}\left(8 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)$.

Q9. Déduire de ce qui précède la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

Il est clair que : $\left|-\frac{1}{6}\right| < 1$

Par théorème, on a alors : $\left(-\frac{1}{6}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par opérations sur les limites, il vient que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{6}{7}$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{8}{7}$

Problème n° 2 | Étude d'une suite de matrices | Extrait & Adapté ATS 2022

Dans tout cet exercice, on désigne par A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A | Recherche d'une matrice semblable à la matrice A

Dans tout ce qui suit, on considère la matrice P donnée par $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice T donnée par $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q10. La matrice T est-elle inversible ?

Éléments de correction

La matrice T est une matrice triangulaire supérieure, dont tous les termes diagonaux sont non nuls. Par théorème cette dernière est donc inversible.

Q11. Montrer que $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, puis calculer $P^3 - 2P^2 + 2P - \mathrm{I}_3$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis que $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, il vient alors que : $P^3 - 2P^2 + 2P - \mathrm{I}_3 = (0)$.

Q12. Déduire de ce qui précède que P est inversible, et expliciter son inverse.

Éléments de correction

Puisque $P^3 - 2P^2 + 2P - \mathrm{I}_3 = (0)$, il vient que : $P\left(P^2 - 2P + 2\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$
Par suite, la matrice P est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse $P^{-1} = P^2 - 2P + 2\mathrm{I}_3$.

Un dernier calcul direct donne alors que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q13. Calculer AP et PT. Exprimer alors A en fonction de P, T et P^{-1}.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et que $PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Par suite, puisque $AP = PT$, en multipliant à droite par P^{-1}, il vient : $A = PTP^{-1}$.

Q14. En déduire que la matrice A est inversible.

Éléments de correction

La matrice A étant égal au produit de matrices inversibles, par théorème, elle est inversible.

Partie B | Construction d'une suite de matrices

On définit alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ par les relations : $\begin{cases} X_0 & = & A \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} & = & \dfrac{1}{n+1}(X_n)^2 + 2\mathrm{I}_3 - A \end{cases}$

Q15. Calculer $(A - \mathrm{I}_3)^2$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $A - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et par suite que $(A - \mathrm{I}_3)^2 = (0)$

Q16. À l'aide de la question précédente, retrouver le caractère inversible de A et donner alors A^{-1}.

Éléments de correction

Puisque $A\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3 A$, il vient que : $(A - \mathrm{I}_3)^2 = A^2 - 2A + \mathrm{I}_3$
Ainsi, on a : $-A^2 + 2A = \mathrm{I}_3$
Par suite, il vient que : $A(-A + 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{I}_3$
ce qui assure que A est inversible à droite, donc inversible et d'inverse $A^{-1} = -A + 2\mathrm{I}_3$.
Finalement on obtient que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Q17. Déterminer deux couples de réels (α_0, β_0) et (α_1, β_1) tels que $X_0 = \alpha_0 \mathrm{I}_3 + \beta_0 A$ et $X_1 = \alpha_1 \mathrm{I}_3 + \beta_1 A$.

Éléments de correction

Il est immédiat que $X_0 = 0\mathrm{I}_3 + 1A$ donc $(\alpha_0, \beta_0) = (0, 1)$.
Par définition, on a : $X_1 = \dfrac{1}{0+1} X_0^2 + 2\mathrm{I}_3 - A$
Or $X_0^2 = A^2$ et on sait que $A^2 - 2A + \mathrm{I}_3 = (0)$ ce qui donne que $A^2 = 2A - \mathrm{I}_3$.
On en déduit donc que $X_1 = 2A - \mathrm{I}_3 + 2\mathrm{I}_3 - A$ ce qui amène à $X_1 = \mathrm{I}_3 + A$ et par suite que $(\alpha_1, \beta_1) = (1, 1)$ convient.

Q18. Démontrer qu'il existe deux suites de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n A$$

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels α_n et β_n tels que $X_n = \alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n A$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : La question précdente montre qu'il existe deux réels α_0 et β_0 tels que $X_0 = \alpha_0 \mathrm{I}_3 + \beta_0 A$, ce qui est exactement $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire qu'il existe deux réels α_n et β_n tels que $X_n = \alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n A$.

Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $X_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} X_n^2 + 2\mathrm{I}_3 - A$.

Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &= \frac{1}{n+1}(\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n A) + 2\mathrm{I}_3 - A \\
&= \frac{1}{n+1}\left(\alpha_n^2 \mathrm{I}_3 + 2\alpha_n\beta_n A + \beta_n^2 A^2\right) + 2\mathrm{I}_3 - A \\
&= \frac{\alpha_n^2}{n+1}\mathrm{I}_3 + \frac{2\alpha_n\beta_n}{n+1}A + \frac{\beta_n^2}{n+1}A^2 + 2\mathrm{I}_3 - A \\
&= \left(\frac{\alpha_n^2}{n+1} + 2\right)\mathrm{I}_3 + \left(\frac{2\alpha_n\beta_n}{n+1} - 1\right)A + \frac{\beta_n^2}{n+1}A^2 \\
&= \left(\frac{\alpha_n^2}{n+1} + 2\right)\mathrm{I}_3 + \left(\frac{2\alpha_n\beta_n}{n+1} - 1\right)A + \frac{\beta_n^2}{n+1}(2A - \mathrm{I}_3) \\
&= \left(\frac{\alpha_n^2}{n+1} + 2\right)\mathrm{I}_3 + \left(\frac{2\alpha_n\beta_n}{n+1} - 1\right)A + \frac{2\beta_n^2}{n+1}A - \frac{\beta_n^2}{n+1}\mathrm{I}_3 \\
&= \left(\frac{\alpha_n^2}{n+1} + 2 - \frac{\beta_n^2}{n+1}\right)\mathrm{I}_3 + \left(\frac{2\alpha_n\beta_n}{n+1} - 1 + \frac{2\beta_n^2}{n+1}\right)A \\
&= \underbrace{\left(\frac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2\right)}_{=\alpha_{n+1}}\mathrm{I}_3 + \underbrace{\left(\frac{2\beta_n(\alpha_n+\beta_n)}{n+1} - 1\right)}_{=\beta_{n+1}}A
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2$ et $\beta_{n+1} = \dfrac{2\beta_n(\alpha_n+\beta_n)}{n+1} - 1$, il vient qu'il existe bien un couple de réels (α_n, β_n) tel que $X_{n+1} = \alpha_{n+1}\mathrm{I}_3 + \beta_{n+1}A$, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q19. Déterminer les valeurs des couples (α_2, β_2) et (α_3, β_3) définis par la question précédente.

Éléments de correction

Les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont d'après la question précédente définies par les relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 &=& 0 \\ \beta_0 &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_{n+1} &=& \dfrac{\alpha_n^2 - \beta_n^2}{n+1} + 2 \\ \beta_{n+1} &=& \dfrac{2\beta_n(\alpha_n+\beta_n)}{n+1} - 1 \end{array}\right.$$

des calculs successifs donnent que : $\alpha_1 = 1$ et $\beta_1 = 1$ que l'on connaissait déjà.
Puis que $\alpha_2 = 2$ et $\beta_2 = 1$, et ensuite que $\alpha_3 = 3$ et $\beta_3 = 1$.

Q20. Conjecturer une expression de α_n et de β_n en fonction de n, puis donner l'expression de X_n en fonction de n.

Éléments de correction

On peut conjecturer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = n$ et $\beta_n = 1$.
Finalement, on montrerait que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = n\mathrm{I}_3 + A$.

Partie C | Inversibilité des matrices X_n

On se propose dans cette partie d'étudier l'inversibilité des matrices X_n construites dans la partie précédente.

Q21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le rang de la matrice $n\mathrm{I}_3 + A$ en fonction de n.

Éléments de correction

Par construction, on a : $n\mathrm{I}_3 + A = \begin{pmatrix} n+2 & 2 & 1 \\ -1 & n-1 & -1 \\ 1 & 2 & n+2 \end{pmatrix}$

On recherche alors le rang de la matrice $n\mathrm{I}_3 + A$ par échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} n+2 & 2 & 1 \\ -1 & n-1 & -1 \\ 1 & 2 & n+2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & n+2 \\ -1 & n-1 & -1 \\ n+2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (n+2)L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & n+2 \\ 0 & n+1 & n+1 \\ 0 & -2n-2 & 1-(n+2)^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & n+2 \\ 0 & n+1 & n+1 \\ 0 & 0 & -(n+1)^2 \end{pmatrix}$$

Seuls les deux coefficients diagonaux $n+1$ et $(n+1)^2$ peuvent s'annuler, et s'annulent simultanément pour $n=-1$, qui de fait est une valeur exclue pour n.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le rang de $n\mathrm{I}_3 + A$ est égal à 3.

Q22. La matrice X_n est-elle inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Éléments de correction

D'après les questions précédentes, $X_n = n\mathrm{I}_3 + A$, et est donc de rang 3 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or comme $X_n \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, puisqu'elle est de rang 3, par théorème, elle est inversible.

Q23. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = P\left(\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T\right) P^{-1}$.

Éléments de correction

On commence par remarquer que $\mathrm{I}_3 = P\mathrm{I}_3P^{-1}$. Ainsi, il vient : $\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ X_n &= \alpha_n P\mathrm{I}_3P^{-1} + \beta_n PTP^{-1} \\ &= P\left(\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T\right) P^{-1} \end{aligned}$

Q24. En déduire de nouveau que la matrice X_n est inversible et expliciter son inverse en fonction de P, P^{-1} et $\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T$.

Éléments de correction

La matrice $\alpha_n \mathrm{I}_3 + \beta_n T$ est une matrice triangulaire supérieure, dont les termes diagonaux sont tous égaux à $\alpha_n + \beta_n$, qui sont clairement tous non nuls d'après les expressions trouvées précédemment.
Par suite, la matrice $\alpha_n \mathrm{I}_3 + T$ est inversible, et par conséquent, par produit de matrices inversibles, X_n est inversible.
Par ailleurs, on a : $\begin{aligned} (X_n)^{-1} &= \left(P\left(\alpha_n \mathrm{I}_3 + T\right) P^{-1}\right)^{-1} \\ &= P^{-1}\left(\alpha_n \mathrm{I}_3 + T\right)^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} \\ &= P^{-1}\left(\alpha_n \mathrm{I}_3 + T\right)^{-1} P \end{aligned}$

Partie D | Calcul des puissances de X_1

On se propose dans cette question de calculer les puissances de la matrice X_1 où l'on rappelle que $X_1 = \mathrm{I}_3 + A$.

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Q25. Montrer que la connaissance des puissances de la matrice $\mathrm{I}_3 + T$ suffit pour déterminer les puissances de la matrice X_1.

Éléments de correction

Puisque $A = PTP^{-1}$, sur le même principe que précédemment, on a $X_1 = P\left(\mathrm{I}_3 + T\right) P^{-1}$ et on établirait par récurrence que $\left(X_1\right)^k = P\left(\mathrm{I}_3 + T\right)^k P^{-1}$ pour tout entier k.

Q26. Déterminer une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = \mathrm{I}_3 + N$, puis démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \mathrm{I}_3 + nN$.

Éléments de correction

Il est immédiat que $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et que $\mathrm{I}_3 N = N \mathrm{I}_3$. Ainsi, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} N^k$.

Or il est immédiat que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ N^k = (0)$.

Par suite, il vient : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},$

$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 \\ &= \mathrm{I}_3 + nN \end{aligned}$$

ce qui donne bien la forme voulue, cette relation étant par ailleurs vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

Q27. Exprimer alors $(\mathrm{I}_3 + T)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

Puisque $\mathrm{I}_3 T = T \mathrm{I}_3$, il vient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathrm{I}_3 + T)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} T^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3 + kN) \\ &= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)}_{=2^n} \mathrm{I}_3 + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \right)}_{=n2^{n-1}} N \\ &= 2^n \mathrm{I}_3 + n 2^{n-1} N \end{aligned}$$

Problème 3 | Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et matrices

Dans tout cet exercice, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

Pour simplifier les notations qui vont suivre, si $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, on désignera par X la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Par exemple pour $e_2 = (0,1,0)$, on notera $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou pour $x = (1,-2,4)$ on notera $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Partie A | Noyau de la matrice A

On considère le sous-ensemble K de $\mathbb{R}^3$ défini par : $K = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ AX = (0) \right\}$

Q28. Le vecteur $v = (1,2,3)$ appartient-il à K ?

Éléments de correction

Par définition de K, on a : $(v \in K) \quad \Leftrightarrow \quad (AV = (0))$ où $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Un calcul direct donne ici que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et donc que $v \notin K$.

Q29. Montrer que K est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

$K \subset \mathbb{R}^3$ **:** par construction

$\overrightarrow{0} = (0,0,0) \in K$ **:** en effet, on a trivialement que $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stabilité de K par combinaison linéaire : soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \in & K \\ y = (y_1, y_2, y_3) & \in & K \end{array} \right.$.

Posons $z = \lambda x + y$ et montrons que $z \in K$, c'est à dire que $AZ = (0)$.

Par construction de $z = (z_1, z_2, z_3)$, on a les relations : $\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 & = & \lambda x_1 + y_1 \\ z_2 & = & \lambda x_2 + y_2 \\ z_3 & = & \lambda x_3 + y_3 \end{array} \right.$ et par suite $Z = \lambda X + Y$.

Finalement on a :
$$\begin{aligned} AZ &= A(\lambda X + Y) \\ &= \lambda \underbrace{AX}_{\substack{=(0) \\ \textbf{car } X \in K}} + \underbrace{AY}_{\substack{=(0) \\ \textbf{car } Y \in K}} \\ &= \lambda \times (0) + (0) \\ &= (0) \end{aligned}$$
et par conséquent $Z \in K$, ce qui assure que K est bien stable par combinaison linéaire.

Conclusion : K est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q30. Démontrer que $K = \text{Vect}\,((1, 2, -3))$.

Éléments de correction

On a tout d'abord pour $x = (x_1, x_2, x_3)$ que : $AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

Par suite, on a :
$$\begin{aligned} (x = (x_1, x_2, x_3) \in K) &\Leftrightarrow (AX = (0)) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} (x_1, x_2, x_3) \text{ est solution du} \\ \text{système de représentation} \\ \text{matricelle } (A|0) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A|0)$ donne que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \vert & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \vert & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & -3 & -2 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \vert & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne les relations : $\begin{cases} x_1 & = & -\dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 & = & -\dfrac{2}{3}x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{cases}$

On en déduit alors que : $(x = (x_1, x_2, x_3) \in K) \quad \Leftrightarrow \quad \left(x \in \text{Vect}\left(\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, 1\right)\right)\right)$
et par suite que $K = \text{Vect}\,((1, 2, -3))$.

Partie B | Image de la matrice A

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$S = \left\{b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ le système de représentation matricielle } (A|B) \text{ est compatible}\right\}$$

Q31. Calculer AE_1 puis en déduire trois vecteurs de S.

Éléments de correction

Un calcul direct de AE_1 donne que $AE_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc que le système de représentation matricielle $\left(A \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est compatible puisque admet le triplet $e_1 = (1, 0, 0)$ comme solution. Ainsi $(1, 2, 1)$ appartient à S.
Sur le même principe, puisque $AE_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AE_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a que $(1, -1, 1) \in S$ et $(1, 0, 1) \in S$.

Q32. Soient $b = (b_1, b_2, b_3)$ et $c = (c_1, c_2, c_3)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ tels que $AX = B$ et $AY = C$.

Montrer que le système de représentation matricielle $(A|\lambda B + C)$ est compatible.

Éléments de correction

Il est immédiat que $A(\lambda X) = \lambda B$.
Par suite, il vient que : $\begin{aligned} A(\lambda X + Y) & = A(\lambda X) + AY \\ & = \lambda B + C \end{aligned}$
et par suite le vecteur $z = \lambda x + y$ est une solution du système de représentation matricielle $(A|\lambda B + C)$.

Q33. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

$S \subset \mathbb{R}^3$ **:** par construction
$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0) \in S$ **:** en effet, le vecteur $(0, 0, 0)$ est bien solution triviale du système homogène $(A|0)$.
Stabilité de S par combinaison linéaire : le résultat a été établi à la question précédente.
Conclusion : S est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q34. Soit $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Étudier la compatibilité du système de représentation matricielle $(A|B)$, en explicitant notamment les équations de compatibilité de ce dernier.

Éléments de correction

On procède à un échelonnement en lignes du système de représentation matricielle $(A|B)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & -1 & 0 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{array}\right)$$

On en déduit donc que : $((A|B)$ est compatible$) \quad \Leftrightarrow \quad (b_3 - b_1 = 0)$.

Q35. Montrer alors que S est un plan vectoriel dont on déterminera une famille génératrice.

Éléments de correction

L'équation de compatibilité obtenue à la question précédente donne que :

$$\begin{aligned} (b = (b_1, b_2, b_3) \in S) \quad & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} b_1 & = & b_3 \\ b_2 & = & b_2 \\ b_3 & = & b_3 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow (b \in \text{Vect}\,((1,0,1)\,, \text{Vect}\,(0,1,0))) \end{aligned}$$

Par suite, S est bien un plan vectoriel et on a $S = \text{Vect}\,((1,0,1)\,, \text{Vect}\,(0,1,0))$.

Partie C | Éléments propres de la matrice A

On désigne par $\text{sp}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par : $\text{sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R},\ A - \lambda \text{I}_3$ n'est pas inversible$\}$.

Q36. Montrer que $0 \in \text{sp}(A)$.

Éléments de correction

Il s'agit de vérifier que la matrice $A - 0\text{I}_3 = A$ n'est pas inversible, ce qui est le cas puisque la matrice A possède deux lignes identiques et donc son rang ne pourra pas être ègal à 3.

Q37. On suppose dans cette question que λ est un réel non nul.

Montrer que la matrice $A - \lambda\text{I}_3$ est de rang 3 si, et seulement si, $\lambda^2 - \lambda - 4 \neq 0$.

Éléments de correction

On procède à un échelonnement en lignes de la matrice $A - \lambda\text{I}_3$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda - 1)\,L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda-3 & -2+2\lambda \\ 0 & \lambda & 1-(\lambda-1)^2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-(\lambda-1)^2 \\ 0 & -\lambda-3 & -2+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \lambda L_3 + (\lambda+3)\,L_2 \\ \text{car } \lambda \neq 0}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3+\lambda^2+4\lambda \end{pmatrix}$$

Comme $\lambda \neq 0$, seul le coefficient $-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda$ peut éventuellement s'annuler de sorte que le rang de $A - \lambda\text{I}_3$ ne sera pas égal à 3.

Or il est immédiat que :

$$\begin{aligned} (-\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda) \quad & \Leftrightarrow \left(-\lambda\left(\lambda^2 - \lambda - 4\right) = 0\right) \\ & \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - \lambda - 4 = 0\right) \end{aligned}$$

Par suite : $(\text{rg}\,(A - \lambda\text{I}_3) = 3) \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda^2 - \lambda - 4 \neq 0)$

Q38. Déterminer alors l'ensemble $\mathrm{sp}(A)$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède on sait que la matrice $A - \lambda \mathrm{I}_3$ n'est pas inversible si, et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$. Les solutions de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 4 = 0$ étant $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$, on en déduit que :

$$\mathrm{sp}(A) = \left\{ 0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$$