**Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

## Problème no 1 | | Extrait ENS 2021 Filière BL

Ce problème comporte deux parties, globalement indépendantes, où l'on pourra réinvestir dans la partie B , en le précisant, des résultats de la partie $A$

### Partie A | Loi du minimum de deux variables aléatoires

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble des entiers $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$, minimum entre $X_1$ et $X_2$.

**Q1.** Que vaut $\mathbb{P}([X_1 = 1])$, la probabilité de l'événement $[X_1 = 1]$.

**Q2.** Calculer $\mathbb{P}([X = n])$.

**Q3.** Montrer que les événements $[X = n]$ et $[X_1 = 1]$ sont incompatibles.

**Q4.** En déduire que $X$ et $X_1$ ne sont pas indépendantes.

**Q5.** Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}([X \geq k]) = \dfrac{(n-k+1)^2}{n^2}$.

**Q6.** Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Que vaut $\mathbb{P}([X = k])$ ?

**Q7.** En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)$, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

**Q8.** En déduire la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ puis calculer la limite du quotient $\dfrac{\mathbb{E}(X_1)}{n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Q9.** On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

**Q10.** Calculer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

### Partie B | Étude d'une variable aléatoire conditionnée

Soit $m \geq 1$ un entier naturel et $Y$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots m\}$.

On considère la variable aléatoire $Z$ de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, Y\}$.

Par exemple, si la réalisation de $Y$ donne $3$, alors $Z$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, tandis que si la réalisation de $Y$ donne $5$, alors $Z$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 5\}$, et ainsi de suite.

**Q11.** **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathbb{P}([Y = k]) = 1$.

Quelle est alors la loi de $Z$ ? Donner, sans justification, son espérance $\mathbb{E}(Z)$.

**On suppose alors dans toute la suite que, pour tout** $k \in \{1, \ldots, m\}$**, on a** $\mathbb{P}([Y = k]) > 0$**.**

**Q12.** Énoncer la formule des probabilités totales.

**Q13.** Montrer que, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{k}$.

**Q14.** Pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, montrer que $\mathbb{P}([Z = \ell]) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\ell^2}$.

**Q15.** **Dans cette question seulement,** on suppose que la loi de $Y$ est donnée par la formule :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \mathbb{P}([Y = k]) = \frac{2k}{m(m+1)}$$

Expliciter $\mathbb{P}([Z = \ell])$ pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ puis pour tout $1 \leq \ell \leq k \leq m$, calculer $\mathbb{P}_{[Z=\ell]}([Y = k])$.

**Q16.** On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq m\}$.

On considère la double somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} a_{k,\ell}$.

Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou noircissant les cases correspondant aux indices $k$ et $\ell$ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparaît dans cette double somme.

| | $\ell = 1$ | $\ell = 2$ | $\ell = 3$ | $\ell = 4$ | $\ldots$ | $\ell = m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $k = 1$ | | | | | | |
| $k = 2$ | | | | | | |
| $k = 3$ | | | | | | |
| $k = 4$ | | | | | | |
| $\vdots$ | | | | | | $\vdots$ |
| $k = m$ | | | | | | |

Expliquer pourquoi $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}$.

**Q17.** Montrer que $\mathbb{E}(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{k+1}{2} \mathbb{P}([Y = k])$.

**Q18.** Exprimer l'espérance de $Z$ en fonction de celle de $Y$.

**Q19.** Est-il possible d'exprimer la variance de $Z$ uniquement en fonction de la variance de $Y$ ?

## Problème 2 | Autour des séries géométriques | Extrait de ENS 2015 Filière BL

### Partie A | Préliminaires techniques

**Q20.** Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$ la série de terme général $r^n$ est-elle convergente ? Lorsque la série converge, donner une forme simple pour $S_1(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$.

**Q21.** Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(-1)^n r^{2n}$ est-elle convergente ?

Lorsque la série converge, donner une formule simple pour $S_2(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n}$.

### Partie B | Recherche d'un encadrement de $\pi$

Soit $f$ la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$ .

**Q22.** Construire, en le justifiant, le tableau de variatons de $f$, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f$, en indiquant les valeurs prises par la fonction $f$ en $-1$, $0$ et $1$.

Ce tracé ayant vocation à être complété à la question suivante, il est recommandé de lui consacrer une surface suffisante.

**Q23.** Écrire le développement limité à l'ordre 2 de $f$ en $0$.

Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse $0$, en justifiant la postion relative de cette tangente et de la courbe, au voisinage de $0$ et globalement.

**Q24.** Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine du plan situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$, au-dessus de l'axe des abscisses, à droite de l'axe des ordonnées et à gauche de la droite d'équation $x = 1$.

**Q25.** Montrer que, pour tout $x \in [0;1[$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} = \frac{x^4}{1+x^2}$

**Q26.** En utilisant le résultat de la question **Q21**, en déduire que pour tout $x \in [0;1[$ :

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

Cet encadrement est-il encore valable pour $x = 1$ ?

**Q27.** En déduire un encadrement de $\mathcal{A}_1$, puis un encadrement de $\pi$.

**Q28.** Soit $j \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2j-1}(-1)^k x^{2k} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \sum_{k=0}^{2j}(-1)^k x^{2k}$$

En déduire un encadrement de $\pi$.

**Q29.** Quelle valeur de $j$ doit-on prendre pour obtenir un encadrement de $\pi$ à $10^{-2}$ près ? Que se passe-t-il lorsque $j$ tend vers l'infini ?

## Problème n° 3 | Intégrale impropre et somme d'une série de référence | Extrait G2E 2012 Filière BCPST

Dans tout ce problème, on considère la fonction $f$ donnée par : $f : \left| \begin{array}{lcl} [0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$

L'objet de ce problème est de déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

### Partie A | Étude de la fonction $f$

**Q30.** Montrer que $f$ est continue en $0$.

**Q31.** Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq \mathrm{e}^x$

**Q32.** Montrer que : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 < f(x) \leq 1$

## Partie B | Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans tout ce qui suit $n$ désignera un entier naturel non nul et on désigne par $H$ la fonction donnée par :

$$H : \left| \begin{array}{ccc} ]0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

**Q33.** Soit $x > 0$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{x}-1} = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}-1} - \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx}$

**Q34.** Soit $M \geq 0$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

**Q35.** Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est convergente et en donner sa valeur.

**Q36.** Soit $M \geq 0$. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

**Q37.** Justifier que $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et expliciter sa dérivée sur $]0;+\infty[$.

**Q38.** Déduire de ce qui précède les variations de $H$ sur $[0;+\infty[$.
On ne demande pas de déterminer la limite de $H$ en $+\infty$.

**Q39.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}dx$ est convergente et en donner un majorant.

**Q40.** Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

## Partie C | Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

**Q41.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

**Q42.** Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$