À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | | Extrait ENS 2021 Filière BL

Ce problème comporte deux parties, globalement indépendantes, où l'on pourra réinvestir dans la partie B , en le précisant, des résultats de la partie A

Partie A | Loi du minimum de deux variables aléatoires

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble des entiers $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

On s'intéresse à la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$, minimum entre X_1 et X_2.

Q1. Que vaut $\mathbb{P}([X_1 = 1])$, la probabilité de l'événement $[X_1 = 1]$.

Éléments de correction

Comme X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, on a directement que $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \dfrac{1}{n}$.

Q2. Calculer $\mathbb{P}([X = n])$.

Éléments de correction

Par définition de X, on a : $[X = n] = [X_1 = n] \cap [X_2 = n]$

Ainsi, par indépendance de X_1 et X_2, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X = n]) &= \mathbb{P}([X_1 = 1]) \times \mathbb{P}([X_2 = n]) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Q3. Montrer que les événements $[X = n]$ et $[X_1 = 1]$ sont incompatibles.

Éléments de correction

Il est immédiat que $[X = n] = [X_1 = n] \cap [X_2 = n]$ et par suite que :

$$[X = n] \cap [X_1 = 1] = \underbrace{\underbrace{[X_1 = 1] \cap [X_1 = n]}_{=\varnothing} \cap [X_2 = n]}_{=\varnothing}$$

ce qui assure bien que $[X_1 = 1]$ et $[X = n]$ sont incompatibles.

Q4. En déduire que X et X_1 ne sont pas indépendantes.

Éléments de correction

Si X et X_1 étaient indépendantes, on devrait avoir que : $\underbrace{\mathbb{P}([X_1=1])\times\mathbb{P}([X_n=n])}_{=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n^2}\neq 0}=\underbrace{\mathbb{P}([X_1=1]\cap[X_n=n])}_{=0}$

Ainsi, X et X_1 ne sont pas indépendantes.

Q5. Soit $k\in[\![1;n]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}([X\geq k])=\dfrac{(n-k+1)^2}{n^2}$.

Éléments de correction

Par définition de X, on a : $[X\geq k]=[X_1\geq k]\cap[X_2\geq k]$.
Par indépendance de X_1 et X_2, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X\geq k]) &= \mathbb{P}([X_1\geq k])\times\mathbb{P}([X_2\geq k])\\ &= \frac{n-k+1}{n}\times\frac{n-k+1}{n}\\ &= \frac{(n-k+1)^2}{n^2}\end{aligned}$$

Q6. Soit $k\in[\![1;n]\!]$. Que vaut $\mathbb{P}([X=k])$?

Éléments de correction

Pour $k\geq n-1$, il est immédiat que : $\mathbb{P}([X=k])=\mathbb{P}([X\geq k])-\mathbb{P}([X\geq k+1])$

Ainsi, pour $k\geq n-1$, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \frac{(n-k+1)^2}{n^2}-\frac{(n-(k+1)+1)^2}{n^2}\\ &= \frac{(n-k+1)^2}{n^2}-\frac{(n-k)^2}{n^2}\\ &= \frac{(n-k+1)^2-(n-k)^2}{n^2}\\ &= \frac{((n-k+1)-(n-k))((n-k+1)+(n-k))}{n^2}\\ &= \frac{2(n-k)+1}{n^2}\end{aligned}$$

La formule reste clairement valable pour $k=n$ puisque l'on retrouve $\mathbb{P}([X=n])=\dfrac{1}{n^2}$.

Q7. En remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)$, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Éléments de correction

En effectuant le changement d'indice $j=n-k+1$ dans la somme donnée, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)$.

Par linéarité de la somme, on en déduit que : $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=1}^{n}k}_{=S}=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}n}_{=n\times n}-\underbrace{\sum_{j=1}^{n}j}_{=S}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}1}_{=n}$

et finalement que : $2S=n^2+n$
ce qui amène que $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Q8. En déduire la valeur de l'espérance $\mathbb{E}(X_1)$ puis calculer la limite du quotient $\dfrac{\mathbb{E}(X_1)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

X_1 étant une variable aléatoire à support fini qui est $[\![1;n]\!]$, elle admet une espérance qui vaut par définition $\displaystyle\mathbb{E}(X_1)=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}([X_1=k])$ c'est à dire $\displaystyle\mathbb{E}(X_1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$.

Ainsi, d'après la question précédente, on en déduit que $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n(n+1)}{2}$ ce qui donne que $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{n+1}{2}$.

Il est immédiat alors que :
$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(X_1)}{n} &= \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Q9. On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

Éléments de correction

X_1 étant une variable aléatoire à support fini qui est $[\![1;n]\!]$, elle admet une espérance qui vaut par définition $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k])$ c'est à dire $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(2(n-k)+1)}{n^2}$

On a ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1} \frac{2nk-2k^2+k}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)k-2k^2}{n^2} \\ &= \frac{2n+1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^2}\sum_{k+1}^{n} k^2 \\ &= \frac{2n+1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{n}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \end{aligned}$$

Q10. Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\mathbb{E}(X)}{n}$.

Éléments de correction

On a directement que :
$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(X)}{n} &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1\times 2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Partie B | Étude d'une variable aléatoire conditionnée

Soit $m \geq 1$ un entier naturel et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots m\}$.
On considère la variable aléatoire Z de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, Y\}$.
Par exemple, si la réalisation de Y donne 3, alors Z suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, tandis que si la réalisation de Y donne 5, alors Z suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 5\}$, et ainsi de suite.

Q11. **Dans cette question seulement**, on suppose qu'il existe un $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\mathbb{P}([Y=k]) = 1$.
Quelle est alors la loi de Z ? Donner, sans justification, son espérance $\mathbb{E}(Z)$.

Éléments de correction

Z suit alors la loi uniforme sur $[\![1;k]\!]$, ce qui compte-tenu des résultats de la partie précédente donne que Z admet une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

On suppose alors dans toute la suite que, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, on a $\mathbb{P}([Y = k]) > 0$.

Q12. Énoncer la formule des probabilités totales.

Éléments de correction

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements tous de probabilités non nulles, alors pour tout événement B, on a $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}_{A_k}(B)$.

Q13. Montrer que, pour tout $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, on a : $\mathbb{P}([Z = \ell]) = \displaystyle\sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{k}$.

Éléments de correction

Les événements $[Y = 1]$, ..., $[Y = m]$ forment un système complet d'événements tous de probabilités non nulles par hypothèse, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z = \ell]) &= \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}([Y = k]) \times \mathbb{P}_{[Y=k]}([Z = \ell]) \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathbb{P}([Y = k]) \times \underbrace{\mathbb{P}_{[Y=k]}([Z = \ell])}_{\substack{=0 \text{ car } Z \text{ ne peut prendre} \\ \text{des valeurs plus grandes que } Z}} + \sum_{k=\ell}^{m} \mathbb{P}([Y = k]) \times \mathbb{P}_{[Y=k]}([Z = \ell]) \\
&= \sum_{k=\ell}^{m} \mathbb{P}([Y = k]) \times \underbrace{\mathbb{P}_{[Y=k]}([Z = \ell])}_{=\frac{1}{k}} \\
&= \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{k}
\end{aligned}$$

Q14. Pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$, montrer que $\mathbb{P}([Z = \ell]) \leq \dfrac{\mathbb{E}(Y)}{\ell^2}$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z = \ell]) &= \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{k} \\
&= \sum_{k=\ell}^{m} \frac{1}{k^2} \times k\mathbb{P}([Y = k]) \\
&\leq \sum_{k=\ell}^{m} \frac{1}{\ell^2} \times k\mathbb{P}([Y = k]) \\
&= \frac{1}{\ell^2} \sum_{k=\ell}^{m} k \times \mathbb{P}([Y = k]) \\
&\leq \frac{1}{\ell^2} \sum_{k=1}^{m} k \times \mathbb{P}([Y = k]) \\
&= \frac{1}{\ell^2} \times \mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

Q15. **Dans cette question seulement,** on suppose que la loi de Y est donnée par la formule :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \mathbb{P}([Y = k]) = \frac{2k}{m(m+1)}$$

Expliciter $\mathbb{P}([Z = \ell])$ pour $\ell \in \{1, \ldots, m\}$ puis pour tout $1 \leq \ell \leq k \leq m$, calculer $\mathbb{P}_{[Z=\ell]}([Y = k])$.

Éléments de correction

Valeur de $\mathbb{P}([Z = \ell])$: en reprenant les résultats des questions précédentes, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z = \ell]) &= \sum_{k=\ell}^{m} \frac{\mathbb{P}([Y = k])}{k} \\ &= \sum_{k=\ell}^{m} \frac{2}{m(m+1)} \\ &= \frac{2(m - \ell + 1)}{m(m+1)}\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{P}_{[Z=\ell]}([Y = k])$: pour $1 \leq \ell \leq k \leq m$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Z=\ell]}([Y = k]) &= \frac{\mathbb{P}([Y = k] \cap [Z = \ell])}{\mathbb{P}([Z = \ell])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([Y = \ell]) \times \mathbb{P}_{[Y=k]}([Z = \ell])}{\mathbb{P}([Z = \ell])} \\ &= \frac{1}{m - \ell + 1}\end{aligned}$$

Q16. On considère des nombres réels positifs $\{a_{k,\ell},\ 1 \leq k \leq m,\ 1 \leq \ell \leq m\}$.

On considère la double somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} a_{k,\ell}$.

Recopier le tableau ci-dessous en cochant ou noircissant les cases correspondant aux indices k et ℓ pour lesquels le terme $a_{k,\ell}$ apparaît dans cette double somme.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ldots$	$\ell = m$
$k = 1$						
$k = 2$						
$k = 3$						
$k = 4$						
$\vdots$						$\vdots$
$k = m$						

Expliquer pourquoi $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_{k,\ell}$.

Éléments de correction

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$	$\ell = 4$	$\ldots$	$\ell = m$
$k = 1$	$\times$					
$k = 2$	$\times$	$\times$				
$k = 3$	$\times$	$\times$	$\times$			
$k = 4$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$\vdots$						$\vdots$
$k = m$	$\times$	$\times$	$\times$	$\ldots$	$\times$	$\times$

La somme $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=\ell}^{m} a_{k,\ell}$ consiste à fixer dans un premier temps la colonne, puis somme toutes les lignes de la colonne.

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \sum_{k=1}^{k} a_{k,\ell}$ consiste à fixer dans un premier temps la ligne, puis somme toutes les colonnes de la ligne.

Ces deux sommes ajoutent ainsi chacune toutes les valeurs de ce tableau, et sont donc égales.

Q17. Montrer que $\mathbb{E}(Z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{2}\mathbb{P}([Y=k])$.

Éléments de correction

Par définition de $\mathbb{E}(Z)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \sum_{\ell=1}^{m}\ell\times\mathbb{P}([Z=\ell])\\
&= \sum_{\ell=1}^{m}\ell\sum_{k=\ell}^{m}\frac{\mathbb{P}([Y=K])}{k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=\ell}^{m}\ell\times\frac{\mathbb{P}([Y=k])}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{k}\ell\times\frac{\mathbb{P}([Y=k])}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathbb{P}([Y=k])}{k}\sum_{\ell=1}^{l}\ell\\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathbb{P}([Y=k])}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}\\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{2}\mathbb{P}([Y=k])
\end{aligned}$$

Q18. Exprimer l'espérance de Z en fonction de celle de Y.

Éléments de correction

Puisque $\mathbb{E}(Z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{k+1}{2}\mathbb{P}([Y=k])$ d'après le théorème du transfert, on en déduit que $Z=\frac{Y+1}{2}$ ce qui par linéarité de l'espérance donne que $\mathbb{E}(Z)=\frac{\mathbb{E}(Y)+1}{2}$.

Q19. Est-il possible d'exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y ?

Éléments de correction

Sur le même principe de calcul, on montre que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Z^2\right) &= \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathbb{P}([Y=k])}{k}\sum_{\ell=1}^{l}\ell^2\\
&= \sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}([Y=k])\,\frac{(k+1)(2k+1)}{6}\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{(Y+1)(2Y+1)}{6}\right)\\
&= \frac{2\mathbb{E}\left(Y^2\right)+3EY+1}{6}
\end{aligned}$$

et par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Z) &= \frac{2\mathbb{E}\left(Y^2\right)+3\mathbb{E}(Y)+1}{6}-\frac{(\mathbb{E}(Y))^2+2\mathbb{E}(Y)+1}{4}\\
&= \frac{\mathbb{E}\left(Y^2\right)+3\mathbb{V}(Y)-1}{12}
\end{aligned}$$

Il est clair que si $m=1$, on a que $Z=Y$ et on peut exprimer la variance de Z uniquement en fonction de la variance de Y.
Il s'agit ainsi de montrer si l'on peut trouver une fonction f telle que $\mathbb{E}\left(Y^2\right)=f(\mathbb{V}(Y))$ et ce quelle que soit la variable Y.
Si tel était le cas, on obtiendrait pour la variable aléatoire Y constante égale à 1 que $\mathbb{V}(Y)=0$ et donc que $\mathbb{E}(1)=f(0)$, et en prenant Y constante égale à 2 que $\mathbb{E}(4)=f(0)$, ce qui est clairement impossible.

Problème 2 | Autour des séries géométriques | Extrait de ENS 2015 Filière BL

Partie A | Préliminaires techniques

Q20. Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$ la série de terme général r^n est-elle convergente ? Lorsque la série converge, donner une forme simple pour $S_1(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$.

Éléments de correction

Pour $r = 1$, la série diverge trivialement.
Pour $r \neq 1$, on sait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$
Par ailleurs lorsque $r \neq 1$, on sait que la suite $(r^n)_{n\geq 0}$ est convergente si, et seulement si, $|r| < 1$.
Par suite, la suite des sommes partielles de la série $\sum r^n$ converge si, et seulement si, $|r| < 1$.
On en déduit donc que la série $\sum r^n$ est convergente si, et seulement si, $|r| < 1$.
On a alors dans ce cas, que $S_1(r) = \frac{1}{1-r}$.

Q21. Pour quelles valeurs de $r \in \mathbb{R}$, la série de terme général $(-1)^n r^{2n}$ est-elle convergente ?

Lorsque la série converge, donner une formule simple pour $S_2(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n r^{2n}$.

Éléments de correction

En remarquant que $(-1)^n r^{2n} = \left(-r^2\right)^n$, la série $\sum (-1)^n r^{2n}$ converge si, et seulement si, $\left|-r^2\right| < 1$ c'est à dire $|r| < 1$.
Il vient alors que $S_2(r) = \frac{1}{1+r^2}$.

Partie B | Recherche d'un encadrement de π

Soit f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array} \right.$.

Q22. Construire, en le justifiant, le tableau de variatons de f, puis la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f, en indiquant les valeurs prises par la fonction f en -1, 0 et 1.

Ce tracé ayant vocation à être complété à la question suivante, il est recommandé de lui consacrer une surface suffisante.

Éléments de correction

Il est immédiat que $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.
La fonction $x \longmapsto 1 + x^2$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et y étant dérivable, par quotient, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$.
Il est immédiat que $f'(x)$ est du même signe que $-2x$, ce qui amène le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$	-1	0	-1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

Q23. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0, en justifiant la postion relative de cette tangente et de la courbe, au voisinage de 0 et globalement.

Éléments de correction

On sait que : $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + \underset{t\to 0}{o}(t)$.
Par suite, il vient que : $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$
Par suite, on sait que la tangente à la courbe représentative de f est la droite d'équation $y = 1 + 0 \times x$ et que la position de la courbe de f par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $-x^2$ au voisinage de 0, ici positif.
Par suite, la courbe de f est au-dessous de sa tangente en 0 localement.
Par ailleurs, le tableau de variation de f montre que f présente un maximum en $x = 0$ qui vaut 1.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 1$
ce qui assure que la courbe représentatitve de f est au-dessous de la droite d'équation $y = 1$ sur $\mathbb{R}$, et c'est exactement sa tangente en 0.

Q24. Calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du domaine du plan situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$, au-dessus de l'axe des abscisses, à droite de l'axe des ordonnées et à gauche de la droite d'équation $x = 1$.

Éléments de correction

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t &= [\arctan(t)]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Q25. Montrer que, pour tout $x \in [0;1[$, on a : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{x^4}{1+x^2}$

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+4} \\ &= x^4 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} \\ &= x^4 \times \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

Q26. En utilisant le résultat de la question **Q21**, en déduire que pour tout $x \in [0;1[$:

$$1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$$

Cet encadrement est-il encore valable pour $x = 1$?

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}}_{=\frac{1}{1+x^2}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{1}(-1)^k x^{2k}}_{=1-x^2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}}_{=\frac{x^4}{1+x^2}}$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x^4}{1+x^2} \geq 0$, on en déduit dans un premier temps que $1 - x^2 \leq \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sur le même principe, on a : $\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}}_{=\frac{1}{1+x^2}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{2}(-1)^k x^{2k}}_{=1-x^2+x^4} + \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k x^{2k}$

Comme à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+3} x^{2k+6} \\ &= -x^6 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{2k} \\ &= -x^6 \times \frac{x^4}{1+x^2} \\ &= -\frac{x^{10}}{1+x^2} \end{aligned}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\dfrac{x^{10}}{1+x^2} \leq 0$, on en déduit dans un premier temps que $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$.
Cet encadrement est clairement vrai pour $x = 1$, étant donn :'e que cela devient un cas d'égalité.

Q27. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}_1$, puis un encadrement de π.

Éléments de correction

D'après l'encadrement de la question précédente, et par croissance de l'intégrale pour les fonctions continues, puisque les trois fonctions considérées le sont clairement sur $[0;1]$, il vient que :

$$\underbrace{\int_0^1 \left(1-x^2\right) \mathrm{d}x}_{=\frac{2}{3}} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^1 \left(1-x^2+x^4\right) \mathrm{d}x}_{\frac{13}{15}}$$

ce qui amène à : $\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{4} \leq \dfrac{13}{15}$

et par suite à : $\dfrac{8}{3} \leq \pi \leq \dfrac{52}{15}$

Q28. Soit $j \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a :

$$\sum_{k=0}^{2j-1}(-1)^k x^{2k} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \sum_{k=0}^{2j}(-1)^k x^{2k}$$

En déduire un encadrement de π.

Éléments de correction

On généralise le raisonnement fait qux questions **Q25** et **Q26** pour établir que l'encadrement demandé sur $\dfrac{1}{1+x^2}$.

Q29. Quelle valeur de j doit-on prendre pour obtenir un encadrement de π à 10^{-2} près ? Que se passe-t-il lorsque j tend vers l'infini ?

Éléments de correction

Par le même argument qu'à la question **Q27**, et par linéarité de l'intégrale, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{2j-1}\left((-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}t\right)\leq\frac{\pi}{4}\sum_{k=0}^{2j}\left((-1)^k\int_0^1 x^{2k}\,\mathrm{d}t\right)$$

c'est à dire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2j-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\leq\frac{\pi}{4}\leq\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^k}{2j+1}$

et donc que : $\displaystyle 4\sum_{k=0}^{2j-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\leq\pi\leq 4\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

Il vient alors que : $\displaystyle 0\leq\pi-4\sum_{k=0}^{2j-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}\leq\underbrace{4\sum_{k=0}^{2j}\frac{(-1)^k}{2k+1}-4\sum_{k=0}^{2j-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}}_{=4\times\frac{1}{2j+1}}$

et il suffit donc de prendre j tel que $\dfrac{4}{2j+1}\leq 10^{-2}$ pour obtenir un encadrement de π à 10^{-2} près.

La résolution de l'inéquation $\dfrac{4}{2j+1}\leq 10^{-2}$ donne alors que $j\geq 200$.

Problème n° 3 | Intégrale impropre et somme d'une série de référence | Extrait G2E 2012 Filière BCPST

Dans tout ce problème, on considère la fonction f donnée par : $f:\left|\begin{array}{ccl}[0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1} & \text{si } x>0\end{cases}\end{array}\right.$

L'objet de ce problème est de déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A | Étude de la fonction f

Q30. Montrer que f est continue en 0.

Éléments de correction

Il est clair que : $\mathrm{e}^{x}-1=x+\underset{x\to0}{o}(x)$

Par suite, il vient que : $f(x)=\dfrac{x}{x+\underset{x\to0}{o}(x)}$

On en déduit donc que : $f(x)=\dfrac{1}{1+\underset{x\to0}{o}(1)}$

ce qui assure que $\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}\underset{x\to0}{\longrightarrow},1$ et donc que $f(x)\underset{x\to0}{\longrightarrow}1=f(0)$ et ainsi la continuité de f en 0.

Q31. Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+x\leq\mathrm{e}^{x}$

Éléments de correction

En notant $g:x\longmapsto\mathrm{e}^{x}-1-x$, la fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$
Il est alors immédiat que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$					
Variations de g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0$
et par suite que : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq \mathrm{e}^{x}$.

Q32. Montrer que : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 < f(x) \leq 1$

Éléments de correction

Les variations de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$, donne que : $\forall x \in]0;+\infty[\,, \mathrm{e}^{x} - 1 > 0$.
Par suite : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ 0 < f(x)$.
D'après la question précédente, il vient que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ x \leq \mathrm{e}^{x} - 1$
et comme $\mathrm{e}^{x} - 1$ est strictement positif sur $]0;+\infty[\,,\ \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1} \leq 1$
Ainsi, il vient que : $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ 0 < f(x) \leq 1$.

Partie B | Étude de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$

On s'intéresse dans cette partie à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans tout ce qui suit n désignera un entier naturel non nul et on désigne par H la fonction donnée par :

$$H : \left| \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{M} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Q33. Soit $x > 0$. Montrer que l'on a : $\dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{x}-1} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx}$

Éléments de correction

Il est clair que :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx} &= x\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} \\ &= x\sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{k} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{k+1} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{k} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\,\frac{1-\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^{n}}{1-\mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{x - x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{x}-1} \\ &= \frac{x}{\mathrm{e}^{x}-1} - \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^{x}-1} \end{aligned}$$
ce qui est bien la relation demandée.

Q34. Soit $M \geq 0$. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Éléments de correction

On effectue dans $\displaystyle\int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = 1 \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{array}$$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; M]$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^M + \frac{1}{n}\int_0^M \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{M}{n}\mathrm{e}^{-nM} + \frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^M \\ &= -\frac{M}{n}\mathrm{e}^{-nM} - \frac{\mathrm{e}^{-nM}}{n^2} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Q35. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est convergente et en donner sa valeur.

Éléments de correction

La fonction $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur $[0; +\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa borne $+\infty$.

D'après ce qui précède : $\displaystyle\forall M > 0,\ \int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n}\mathrm{e}^{-nM} - \frac{\mathrm{e}^{-nM}}{n^2} + \frac{1}{n^2}$

Par croissance comparée, on a $\displaystyle\frac{M}{n}\mathrm{e}^{-nM} \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $\displaystyle\frac{\mathrm{e}^{-nM}}{n^2} \underset{nM\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, il vient que : $\displaystyle\int_0^M x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}$

ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

Q36. Soit $M \geq 0$. Donner un encadrement de $\displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède on a : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 < f(x) \leq 1$
Ainsi : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 \leq f(x)\underbrace{\mathrm{e}^{-nx}}_{\geq 0} \leq \mathrm{e}^{-nx}$

Par croissance de l'intégrale pour les fonctions continues sur $[0; M]$, il vient que : $\displaystyle 0 \leq \int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx} \leq \int_0^M \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

Les calculs précédents donnant que $\displaystyle\int_0^M \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-nM}}{n}}_{\geq 0} \leq \frac{1}{n}$, il vient que :

$$0 \leq \int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$$

Q37. Justifier que H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$, et expliciter sa dérivée sur $]0; +\infty[$.

Éléments de correction

La fonction $x \longmapsto f(x)\mathrm{e}^{nx}$ est clairement continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonctio $H : M \longmapsto \displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et on a :

$$\forall M \in [0;+\infty[\,,\ H'(M) = f(M)\mathrm{e}^{-nM}$$

Q38. Déduire de ce qui précède les variations de H sur $[0;+\infty[$.
On ne demande pas de déterminer la limite de H en $+\infty$.

Éléments de correction

D'après la question précdente, on a : $\quad \forall M \in [0;+\infty[\,,\ H'(M) = \underbrace{f(M)\mathrm{e}^{-nM}}_{\geq 0}$

Ainsi, la fonction H est croissante sur $[0;+\infty[$.

M	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $H'(M)$	$+$
Variations de H	0 $\nearrow$

Q39. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}dx$ est convergente et en donner un majorant.

Éléments de correction

La fonction $x \longmapsto f(x)\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur $[0;+\infty[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{nx}\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa borne $+\infty$.
D'après ce qui préc'ede, la fonction H est majorée par $\dfrac{1}{n}$.
Comme il s'agit d'une fonction croissante sur $[0;+\infty[$ d'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la fonction H admet une limite en $+\infty$.
Autrement dit la limite de $\displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ lorsque M tend vers $+\infty$ existe, et par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Puisque : $\quad \forall M \in [0;+\infty[\,,\ \leq \displaystyle\int_0^M f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$

on en déduit par passage à la limite lorsque M tend vers $+\infty$ que : $\quad 0 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$.

Q40. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Éléments de correction

Puisque : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$

d'après le théorème d'encadrement, puisque $\dfrac{1}{n} \underset{n\to 0}{\longrightarrow}$, il vient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie C | Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Q41. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Éléments de correction

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

Par ailleurs, on remarque que par croissances comparées : $\displaystyle x^2 \times \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}-1} = \frac{x^3}{\mathrm{e}^{\,x}\left(1-\mathrm{e}^{\,-x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi puisque $x^2 f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par théorème, puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente, on en déduit par la règle du « $t^\alpha f(t)$ » que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Q42. Déduire des questions précédentes que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Éléments de correction

On sait que : $\displaystyle\forall x \in [0;+\infty[\,,\ \frac{x\mathrm{e}^{\,-nx}}{\mathrm{e}^{\,x}-1} = \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}-1} - \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{\,-kx}$

comme toutes les intégrales des fonctions qui interviennent dans cette égalité sont convergentes, il vient que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\,-nx}}{\mathrm{e}^{\,x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}-1}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{\,-kx}\,\mathrm{d}x$$

ou encore que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{\,-nx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{\,-kx}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{k^2}}$

et par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$: $\displaystyle 0 = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

ce qui est bien le résultat attendu.