À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème nº 1 | Déclinaison autour des devoirs de vacances

Partie A | Calcul algébrique

Soit (x, y, z) un triplet de réels. On définit alors les trois réels a, b et c par :

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx, \quad c = xyz$$

Q1. Exprimer la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ en fonction de a, b et c uniquement.

Éléments de correction

On remarque que :
$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+y+z)(x+y+z) \\ &= x^2 + xy + xz + yx + y^2 + yz + zx + zy + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yx + yz + zx + zy \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yx + zx)\end{aligned}$$
et donc on en déduit que $a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2b$ ce qui donne $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - 2b$.

Q2. Exprimer la quantité $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ en fonction de a, b et c uniquement.

Éléments de correction

En factorisant : $x^2yz + y^2xz + z^2xy = xyz(x + y + z)$
Ce qui donne donc que $x^2yz + y^2xz + z^2xy = ac$.

Partie B | Logarithme et radicaux

On pose $\alpha = \dfrac{7}{16}\ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) - 4\ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$ et $\beta = \ln\left(\left(2 + \sqrt{3}\right)^{20}\right) + \ln\left(\left(2 - \sqrt{3}\right)^{20}\right)$.

Q3. Calculer $\left(1 + \sqrt{2}\right)^2$ puis déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1} = a + b\sqrt{2}$.

Éléments de correction

Un développement donne directement que :
$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 &= 1^2 + 2 \times 1 \times \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 \\ &= 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

et on a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}+1} &= \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}\\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^1}\\ &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}\\ &= -1+\sqrt{2}\end{aligned}$$

Q4. En déduire une expression simplifiée de α en fonction de $\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

Éléments de correction

On a alors :
$$\begin{aligned}\frac{7}{16}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)-4\ln\left(\sqrt{2}+1\right) &= \frac{7}{16}\ln\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= \frac{7}{16}\times 2\times\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= \frac{7}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= \left(\frac{7}{8}-4\right)\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= -\frac{25}{8}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= -\frac{25}{8}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\\ &= \frac{25}{8}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

Q5. Montrer que $\beta=0$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\right)+\ln\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right) &= \ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{20}\times\left(2-\sqrt{3}\right)^{20}\right)\\ &= \ln\left(\left(\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^{20}\right)\\ &= \ln\left(\left(2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{20}\right)\\ &= \ln\left((4-3)^{20}\right)\\ &= \ln\left(1^{20}\right)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Problème nº 2 | Éléments techniques autour des systèmes linéaires

Partie A | Interprétation d'échelonnements réduits en lignes

Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

Q6. On considère le système $\mathcal{S}_1$ d'inconnues le triplet de réels (x,y,z) dont on donne la représentation matricielle ci-dessous et sur laquelle on a fait opérer la succession d'opérations élémentaires telle qu'indiquée.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 5 & 5\\ 5 & 8 & 3 & 1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow 2L_2-L_1\\ L_3\leftarrow 2L_3-5L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet\end{array}\right)$$

Que peut-on alors en conclure pour $\mathcal{S}_1$?

Éléments de correction

On effectue les opérations indiquées.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 5 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 2 pivots non nuls. Le rang du système est donc 2.
Le système présente une équation de compatibilité :

$$\left\{ 0 = 0 \right. \qquad \text{Relation vérifiée}$$

Le système est compatible, et donc $\mathcal{S}_1$ a des solutions, ici une infinité puisqu'il présentera deux inconnues principales et une seule inconnue secondaire.

Q7. On donne ci-après la représentation matricielle d'un système linéaire $\mathcal{S}_2$ d'inconnues le quadruplet de réels (x, y, z, t) et on a commencé un échelonnement réduit en lignes.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim_L \cdots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Poursuivre cet échelonnement réduit en lignes, puis expliciter les solutions de ce système.

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système est donc 4.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

En notant (x, y, z, t) le quadruplet d'inconnues de ce système, on en déduit les relations :

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= -\dfrac{1}{2} \\ z &= 0 \\ t &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Q8. On a procédé à l'échelonnement réduit en lignes d'un système linéaire $\mathcal{S}_3$ d'inconnues le quadruplet de réels (x, y, z, t) pour obtenir :

$$\mathcal{S}_3 \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Utiliser cet échelonnement pour exprimer les solutions du système $\mathcal{S}_3$ en précisant les inconnues principales et les inconnues secondaires.

Éléments de correction

La matrice augmentée du système permet de voir que x, y et z sont les inconnues principales et t l'inconnue secondaire. On peut alors écrire que les $4-$uplets (x, y, z, t) solutions sur système $\mathcal{S}_3$ sont données par les relations :

$$\begin{cases} x &= 2 + t \\ y &= -1 - 2t \\ z &= 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et donc que l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}_3$ est $\{(2+t, -1-2t, 2-t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

Partie B | Résolution de systèmes linéaires

Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

Q9. Résoudre le système $\mathcal{S}_4$ d'inconnues le couple de réels (x, y) à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes :

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 5y = 8 \end{cases}$$

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 8 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 3 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{6}{13}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & \frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{13}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ainsi, $\mathcal{S}_4$ admet un unique couple solution (x, y) donné par : $\begin{cases} x &= 3 \\ y &= 1 \end{cases}$

Q10. Résoudre le système $\mathcal{S}_5$ d'inconnues le triplet de réels (x, y, z) à l'aide d'un échelonnement réduit en lignes :

$$\mathcal{S}_5 : \begin{cases} 2x - y + 5z = 10 \\ 3x + y - 3z = -9 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 3 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{21}{2} & -24 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{21}{2} & -24 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{7}{6}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{9}L_3}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{5}L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)
$$

On en déduit que $\mathcal{S}_5$ admet une unique solution qui est le triplet $(x, y, z,)$ donné par :

$$
\begin{cases} x &= -1 \\ y &= 3 \\ z &= 3 \end{cases}
$$

Problème n° 3 | Équations et systèmes à paramètres

Partie A | Équation de degré 1 à paramètres

On se propose dans cette partie de résoudre l'équation $\mathcal{E}_1$ dépendant du paramètre $m \in \mathbb{R}$ d'inconnue le réel x ci-dessous :

$$\mathcal{E}_1 \,:\, mx + 1 = m^2\,(x+1)$$

Q11. Explicitez, puis résoudre cette équation dans le cas où $m = 2$.

Éléments de correction

Dans le cas où $m = 2$, léquation $\mathcal{E}_1$ devient : $\mathcal{E}_1 \,:\, 2x + 1 = 4\,(x+1)$

Par suite, sa résolution donne :

$$
\begin{aligned}
(2x + 1 = 4\,(x+1)) &\Leftrightarrow (2x + 1 = 4x + 4) \\
&\Leftrightarrow (2x - 4x = 4 - 1) \\
&\Leftrightarrow (-2x = 3) \\
&\Leftrightarrow \left(x = -\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}
$$

et par suite l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{S}_1 = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Q12. En discutant suivant les valeurs du paramètre m et en effectuant éventuellement une disjonction de cas, résoudre $\mathcal{E}_1$.

Éléments de correction

Il est clair que :

$$
\begin{aligned}
\left(mx + 1 = m^2\,(x+1)\right) &\Leftrightarrow \left(mx + 1 = m^2 x + m^2\right) \\
&\Leftrightarrow \left(mx - m^2 x = m^2 - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(\left(m - m^2\right) x = m^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

On a alors :

Si $m - m^2 \neq 0$: on a :

$$
\begin{aligned}
\left(mx + 1 = m^2\,(x+1)\right) &\Leftrightarrow \left(\left(m - m^2\right) x = m^2 - 1\right) \\
&\Leftrightarrow \left(x = \frac{m^2 - 1}{m - m^2}\right)
\end{aligned}
$$

Or il est clair que : $\dfrac{m^2-1}{m-m^2} = \dfrac{(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\dfrac{1+m}{m}$

et par conséquent, $\mathcal{E}_1$ admet une unique solution qui est $-\dfrac{1+m}{m}$.

Si $m - m^2 = 0$ **:** on a : $\left(mx+1 = m^2(x+1)\right) \Leftrightarrow \left(0 = m^2-1\right)$

Or il est immédiat que : $\left(m-m^2=0\right) \Leftrightarrow (m=0 \text{ ou } m=1)$

Par suite, on en déduit que :

Si $m-m^2=0$ **avec** $m=0$ **:** on a $m^2-1=-1$ et donc : $\left(mx+1=m^2(x+1)\right) \Leftrightarrow (0=-1)$
cette dernière relation étant clairement fausse, ce qui fait que dans ce cas $\mathcal{E}_1$ n'admet pas de solution.

Si $m-m^2=0$ **avec** $m=1$ **:** on a $m^2-1=0$ et donc : $\left(mx+1=m^2(x+1)\right) \Leftrightarrow (0=0)$
cette dernière relation étant clairement vrai, ce qui fait que dans ce cas $\mathcal{E}_1$ admet une infinité de solution.

En conclusion :

Si $m=0$ **:** $\mathcal{E}_1$ admet aucune solution et l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{S}=\varnothing$.

Si $m=1$ **:** $\mathcal{E}_1$ admet une infinité de solution et l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{S}=\mathbb{R}$.

Si $m \notin \{0,1\}$ **:** $\mathcal{E}_1$ admet une unique solution et l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $\mathcal{E}_1$ est $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{m+1}{m}\right\}$.

Partie B | Équation de degré 2 à paramètres

On se propose dans cette partie de résoudre l'équation $\mathcal{E}_2$ dépendant du paramètre $m \in \mathbb{R}$ d'inconnue le réel x ci-dessous :

$$\mathcal{E}_2 : \ m^2x(x-1) = x^2+1-m$$

Q13. Expliciter puis résoudre l'équation $\mathcal{E}_2$ dans le cas où $m=2$.

Éléments de correction

Dans le cas où $m=2$, il est clair que $\mathcal{E}_2$ devient : $\mathcal{E}_2 :\ 4x(x-1) = x^2+\underbrace{1-2}_{=-1}$.

Il vient alors :
$$\begin{aligned}\left(4x(x-1)=x^2-1\right) &\Leftrightarrow \left(4x^2-4x=x^2-1\right)\\ &\Leftrightarrow \left(4x^2-x^2-4x+1=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(3x^2-4x+1=0\right)\end{aligned}$$

L'équation $3x^2-4x+1=0$ est une équation de degré 2 de discriminant $\Delta = \underbrace{(-4)^2-4\times3\times1}_{=4} > 0$, donc admet deux solutions réelles données par
$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times3} = \frac{4+2}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times3} = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Q14. À quelle(s) condition(s) sur le réel m, l'équation $\mathcal{E}_2$ est une équation de degré 2 ?

Éléments de correction

$\mathcal{E}_2$ sera une équation de degré 2 si l'on peut l'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq0$, b et c étant deux réels quelconques.

On a donc dans un premier temps :
$$\begin{aligned}\left(m^2x(x-1)=x^2+1-m\right) &\Leftrightarrow \left(m^2\left(x^2-x\right)-x^2-1+m=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(m^2x^2-m^2x-x^2-1+m=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left(\left(m^2-1\right)x^2-m^2x-1+m=0\right)\end{aligned}$$

et par conséquent $\mathcal{E}_2$ est une équation de degré 2 uniquement si $m^2-1\neq0$, c'est à dire si $m\notin\{-1,1\}$.

Q15. Résoudre $\mathcal{E}_2$ dans le cas où $m=0$.

Éléments de correction

Dans ce cas, il est immédiat que : $\left(m^2x\,(x-1)=x^2+1-m\right) \quad\Leftrightarrow\quad \left(x^2+1=0\right)$
et il est clair que l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Ainsi, dans le cas où $m=0$, $\mathcal{E}_2$ admet aucune solution réele, et ainsi, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}=\varnothing$.

Q16. Résoudre $\mathcal{E}_2$ dans le cas où $m=1$ puis $m=-1$.

Éléments de correction

Si $m=1$ **:** compte-tenu des questions précédentes, il est immédiat que $\mathcal{E}_2$ devient : $\mathcal{E}_2 : -x=0$
Il est alors clair que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}=\{0\}$.

Si $m=-1$ **:** compte-tenu des questions précédentes, il est immédiat que $\mathcal{E}_2$ devient : $\mathcal{E}_2 : -x-2=0$
Il est alors clair que l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}=\{-2\}$.

Q17. On suppose que m est tel que $\mathcal{E}_2$ est une équation de degré 2 d'inconnue le réel x.
Montrer que dans ce cas, le discriminant de $\mathcal{E}_2$ est $\Delta=m^4-4m^3+4m^2+4m-4$.

Éléments de correction

On est dans le cas où $\mathcal{E}_2 : \left(m^2-1\right)x^2-m^2x-1+m=0$ avec $m^2-1\neq 0$.
Le discriminant de cette équation de degré 2 est alors :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-m^2\right)^2-4\left(m^2-1\right)(-1+m)\\ &= m^4+\left(-4m^2+4\right)(-1+m)\\ &= m^4+4m^2-4m^3-4+4m\\ &= m^4-4m^3+4m^2+4m-4\end{aligned}$$

Partie C | Système à paramètres de taille 2×2

On se propose dans cette partie de résoudre le système $\mathcal{S}$ dépendant du paramètre $m\in\mathbb{R}$ d'inconnue le couple de réel (x,y) ci-contre : $\mathcal{S} : \begin{cases} 2x-my=m-2\\ -2mx+\quad y=m^2\end{cases}$.

Q18. Effectuez l'(es) opération(s) élémentaire(s) permettant d'obtenir un système équivalent en ligne au système $\mathcal{S}$ dont la représentation matricielle serait de la forme :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2\\ -2m & 1 & m^2\end{array}\right) \underset{\dots}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2\\ 0 & ? & ?\end{array}\right)$$

où les deux « ? » désignent deux réels dépendant ou non de m à déterminer.

Éléments de correction

On a directement que : $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2\\ -2m & 1 & m^2\end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2+mL_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2\\ 0 & 1-m^2 & 2m^2-2m\end{array}\right)$

Q19. Pour quelle(s) valeur(s) de m, le système $\mathcal{S}$ est-il de rang 2 ?

Éléments de correction

On sait que le rang du système est égal au nombre de pivots non nul après échelonnement.
Compte-tenu de la question précédente, les pivots sont 2 et $1-m^2$, où seul ce dernier peut s'annuler dès lors que $m\in\{-1,1\}$.
Par suite on en déduit que :

Si $m\notin\{-1,1\}$ **:** le rang du système $\mathcal{S}$ est de rang 2.

Si $m \in \{-1,1\}$ **:** le rang du système $\mathcal{S}$ est de rang 1.

Q20. Terminer la résolution de $\mathcal{S}$ dans le cas où ce dernier n'est pas de rang 2.

Éléments de correction

D'après la question précédente, $\mathcal{S}$ n'est pas de rang 2 lorsque $m \in \{-1,1\}$, ainsi :

Si $m=1$ **:** le système et la résolution à l'aide de sa représentation matricielle obtenue précdemment devient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, on en déduit que : $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ est $\left\{\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y, y\right),\, y \in \mathbb{R}\right\}$.

Si $m=-1$ **:** le système et la résolution à l'aide de sa représentation matricielle obtenue précdemment devient :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2-L_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

La dernière ligne donne une équation de compatibilité qui est incompatible, donc dans ce cas, $\mathcal{S}$ n'admet pas de solution.

Q21. Devant chaque numéro pair d'une question que vous avez traité dans votre copie, dessiner un lapin.

Éléments de correction

Là c'est à vous de jouer en espérant que vous savez ce qu'est un numéro pair...

Q22. Montrer que : $\forall m \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\, m-2+m\times\dfrac{2m^2-2m}{1-m^2} = -\dfrac{m^2+m+2}{1+m}$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\, m-2+m\times\frac{2m^2-2m}{1-m^2} &= \frac{(m-2)\left(1-m^2\right)+m\left(2m^2-2m\right)}{1-m^2} \\ &= \frac{(m-2)(1-m)(1+m)+2m^2(m-1)}{(1-m)(1+m)} \\ &= \frac{(1-m)\left((m-2)(1+m)-2m^2\right)}{(1-m)(1+m)} \\ &= \frac{m+m^2-2-2m-2m^2}{1+m} \\ &= \frac{-m^2-m-2}{1+m} \\ &= -\frac{m^2+m+2}{1+m} \end{aligned}$$

Q23. Terminer la résolution de $\mathcal{S}$ dans le cas où ce dernier est de rang 2.

Éléments de correction

On reprend et poursuit l'échelonnement initial :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2 \\ -2m & 1 & m^2 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + mL_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -m & m-2 \\ 0 & 1-m^2 & 2m^2-2m \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow (1-m^2)L_1 + mL_2 \\ \text{Licite car } 1-m^2 \neq 0}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2\left(1-m^2\right) & 0 & (m-2)\left(1-m^2\right) + m\left(2m^2-2m\right) \\ 0 & 1-m^2 & 2m^2-2m \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-m^2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{1-m^2}L_2 \\ \text{Licite car } 1-m^2 \neq 0}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & m-2+m\times\dfrac{2m^2-2m}{1-m^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{2m^2-2m}{1-m^2} \end{array}\right)$$

$$\sim_L \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -\dfrac{m^2+m+2}{1+m} \\ 0 & 1 & \dfrac{2m(m-1)}{(1-m)(1+m)} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\dfrac{m^2+m+2}{2(1+m)} \\ 0 & 1 & -\dfrac{2m}{(1-m)} \end{array}\right)$$

et par suite, $\mathcal{S}$ possède comme unique solution le couple $\left(-\dfrac{m^2+m+2}{1+m}, -\dfrac{2m}{1+m}\right)$.