Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Polynômes de Bernstein | Adapté de ESCP 2006 Filière ECS

Dans tout ce problème, on désigne par φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{\mathrm{e}^{t}-1} \end{array}\right.$

Partie A | Continuité et dérivabilité de φ en 0

Q1. Donner, sans justification, le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{t}$.

Q2. Déduire de ce qui précède le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{t}-1}{t}$.

Q3. Déterminer alors la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0.

Q4. Justifier alors que φ est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur de $\varphi(0)$.

Q5. Démontrer que l'on a : $\varphi(t) = 1 - \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{12}t^2 + \underset{t\to 0}{o}\left(t^2\right)$.

Q6. Justifier alors que φ est dérivable en 0, puis donner une équation de la tangente à la courbe représentative de φ en 0 ainsi que les positions relatives de ces deux courbes.

Partie B | Construction d'une famille de polynômes

On admet que la fonction φ possède en 0 un développement à tout ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \times \frac{t^k}{k!} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^N\right)$$

Q7. Déterminer les valeurs de b_0, b_1 et b_2.

Q8. Montrer que la fonction $\Psi : t \longmapsto \varphi(t) - b_1 t$ est une fonction paire.

Q9. En déduire la valeur de b_{2n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q10. Pour tout réel x et tout réel t, on pose : $f(x,t) = \mathrm{e}^{tx}\varphi(t)$
Montrer que $g : t \longmapsto f(x,t)$ admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0, que l'on écrit :

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x) \times \frac{t^k}{k!} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^N\right)$$

où pour tout $k \geq 0$, B_k est un polynôme unitaire de degré k.

Partie C | Quelques particularités de la suite de polynômes B_k

On s'intéresse dans cette partie à quelques propriétés des polynômes B_k construits dans la partie précédente.

Q11. Exprimer $B_k(0)$ en fonction de b_k.

Q12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(1-x,t) = f(x,-t)$

Q13. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déduire des questions précédentes que pour tout $k \geq 0$, on a : $\quad B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.

Q14. En déduire la valeur de $B_k(1)$ en fonction de b_k pour tout $k \geq 1$.

Q15. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.
On pourra au préalable trouver une relation entre $f(x+1,t)$ et $f(x,t)$.

Problème n° 2 | Autour des fonctions génératrices | Adapté de ESCP 2019 Filière BL

Dans tout ce qui suit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et N un entier naturel non nul.
On suppose par ailleurs que toutes les variables aléatoires qui interviennent par la suite sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;N]\!]$, on définit la fonction polynôme G_Z associée à Z par :

$$G_Z : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & G_Z(s) = \mathbb{E}\left(s^Z\right) \end{array} \right.$$

c'est à dire que l'on a : $\quad \forall s \in \mathbb{R},\ G_Z(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([Z=k])\, s^k$

La fonction G_Z ainsi définie est appelée fonction génératrice de Z.

Partie A | Résultats généraux sur les fonctions génératrices

Q16. On suppose uniquement dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;N]\!]$ telles que l'on ait $G_X = G_Y$.

Vérifier que $\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([Y=0])$ puis montrer que X et Y suivent la même loi.
On pourra s'intéresser aux dérivées successives de G_X et G_Y.

Q17. On suppose uniquement dans cette question que X et X sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0;N]\!]$.

Exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

Partie B | Fonction génératrice et calcul d'espérance

Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0;N]\!]$.

Q18. Montrer que $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

Q19. Exprimer $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G_X(1)$, $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Partie C | Quelques exemples de fonctions génératrices

Q20. Déterminer l'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre $p \in \,]0;1[$.

Q21. Déterminer l'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètre N et $p \in \,]0;1[$

Partie D | Exemple d'utilisation

Un éleveur possède 5 lapines. Chacune des lapines engendre une nombre aléatoire de lapins.
La lapine numérotée i engendre X_i lapins.
On suppose que X_1, …, X_5 sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1;7]\!]$.

On note Z le nombre total de lapereaux, et on admet que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,\; G_Z(x) = \left(\dfrac{x\,(1-x^7)}{7\,(1-x)}\right)^5.$

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\dfrac{1}{(1-x)^5} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k+4}{k}x^k + \underset{x\to 0}{o}\,(x^n)$

Q23. En déduire la probabilité que le nombre de lapereaux soit égal à 20.

Problème n° 3 | Tirage de jetons dans un sac | HEC 2019 Filière BL

Partie A | Calcul de la somme d'une série

Dans toute cette partie, x désigne un réel de $]0;1[$ et pour tout entier N, on pose $S_N(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{x^k}{k}$.

Q24. Montrer que pour tout entier $m \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} i x^{i-1} = \frac{1-(m+1)x^m + m x^{m+1}}{(1-x)^2}$

Q25. En déduire que la série $\sum i x^{i-1}$ est convergente et donner la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} i x^{i-1}$.

Q26. Établir que $S_N(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

Q27. En déduire que la série de terme $\sum \dfrac{x^k}{k}$ est convergente et que sa somme $S(x)$ et donnée par :

$$\forall x \in\,]0;1[\,,\; S(x) = -\ln(1-x)$$

Partie B | Étude de tirages dans une urne

Dans tout ce qui suite, on désigne par n un entier fixé supérieur ou égal à 2.

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n.
Une expérience consiste à extraire de ce sac un jeton « au hasard », puis à le remettre dans le sac et effectuer une succession de tirages d'un jeton avec remise.
L'expérience s'arrête dès que l'on tire une jeton portant un numéro non encore obtenu.
On note X le nombre de tirages effectués et on admet que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, et non, il n'y a pas dans ce sujet une question qui vous demandera d'effectuer une quelconque production artistique, un concours blanc, c'est du sérieux.

On suppose que l'expérience est modélisée avec un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Ainsi, pour tout entier $k \geq 2$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si les $(k-1)$ premiers tirages donnent le même numéro et si le ke tirage donne un numéro différent de celui obtenu lors des $(k-1)$ tirages précédents.

Q28. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\mathbb{P}\left([X=k]\right) = \dfrac{n-1}{n^{k-1}}.$

Q29. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}\left([X=k]\right) = 1.$

Q30. Montrer que X admet une espérance.

En réutilisant un résultat de la partie A, montrer que l'espérance de X est égale à $\dfrac{2n-1}{n-1}$.

Q31. Montrer que la variable aléatoire Z définie par $Z = X - 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Q32. Utiliser le résultat de la question précédente pour retrouver la valeur de l'espérance de X et déterminer la variance de X.

Partie C | Une évolution de l'expérience

Pour $k \geq 2$, si l'événement $[X = k]$ est réalisé, on place k boules numérotées de 2 à $k+1$ dans une urne vide et on tire une boule « au hasard » dans cette urne, et on comprend, que la situation se corse pour nous.

On note alors Y le numéro de la boule tirée et on admet que Y est un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Q33. Établir pour tout entier $j \geq 2$ la relation suivante :

$$\mathbb{P}\left([Y = j]\right) = \sum_{k=\max(2,j-1)}^{+\infty} \frac{1}{k} \times \frac{n-1}{n^{k-1}}$$

Q34. À l'aide d'un résultat établi dans la partie A, montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}\left([Y = 2]\right) = -(n-1)\left(1 + n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

Q35. Dans cette question, on suppose que l'entier n n'est plus fixé.
Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbb{P}\left([Y = 2]\right)$ et commenter le résultat obtenu.