À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Endomorphismes et changement de bases

Les deux parties ci-dessous sont indépendantes entre elles.

Partie A | Recherche d'un base dite diagonalisante pour un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z) \end{array} \right.$.

Q1. Montrer que f est linéaire.

Éléments de correction

Par théorème : $\left(\begin{array}{c} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \text{est linéaire} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\left\{ \begin{array}{ccc} \forall u & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall v & \in & \mathbb{R}^3 \\ \forall \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right., f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v) \right)$

Soient alors $\left\{ \begin{array}{rcl} u = (x,y,z) & \in & \mathbb{R}^3 \\ v = (x',y',z') & \in & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \in & \mathbb{R} \end{array} \right.$, on pose $w = \lambda u + v$.

En notant $w = (x'', y'', z'')$, par construction on a les relations $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \end{array} \right.$

Montrons que $f(w) = \lambda f(w) + f(v)$.
Par définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl}
f(w) & = & (x''+2y''-2z'', 2x''+y''-2z'', 2x''+2y''-3z'') \\
& = & (\lambda x + x' + 2(\lambda y + y') - 2(\lambda z + z'), 2(\lambda x + x') + \lambda y + y' - 2(\lambda z + z'), 2(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z')) \\
& = & (\lambda x + x' + 2\lambda y + 2y' - 2\lambda z - 2z', 2\lambda x + 2x' + \lambda y + y' - 2\lambda z - 2z', 2\lambda x + 2x' + 2\lambda y + 2y' - 3\lambda z - 3z') \\
& = & (\lambda x + 2\lambda y - 2\lambda z + x' + 2y' - 2z', 2\lambda x + \lambda y - 2\lambda z + 2x' + y' - 2z', 2\lambda x + 2\lambda y' - 3\lambda z + 2x' + 2y' - 3z') \\
& = & (\lambda x + 2\lambda y - 2\lambda z, 2\lambda x + \lambda y - 2\lambda z, 2\lambda x + 2\lambda y' - 3\lambda z) + \underbrace{(x'+2y'-2z', 2x'+y'-2z', 2x'+2y'-3z')}_{=f(v)} \\
& = & \lambda \underbrace{(x+2y-2z, 2x+y-2z, +2x+2y-3z)}_{=f(u)} + f(v) \\
& = & \lambda f(u) + f(v)
\end{array}$$

Q2. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_3$.

Éléments de correction

On rappelle que $\left\{ \begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0) \\ e_2 & = & (0,1,0) \\ e_3 & = & (0,0,1) \end{array} \right.$

Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1+2\times 0-2\times 0, 2\times 1+0-2\times 0, 2\times 1+2\times 0-3\times 0)\\ & = & (1,2,2)\\ f(e_2) & = & (0+2\times 1-2\times 0, 2\times 0+1-2\times 0, 2\times 0+2\times 1-3\times 0)\\ & = & (2,1,2)\\ f(e_3) & = & (0+2\times 0-2\times 1, 2\times 0+0-2\times 1, 2\times 0+2\times 0-3\times 1)\\ & = & (-2,-2,-3)\end{array}$$

et il vient donc que $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Q3. On considère la famille $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ où $u = (1,1,1)$, $v = (0,1,1)$ et $w = (1,1,2)$.

Déterminer les images par f de u, v et w, puis les exprimer en fonction de u, v et w.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(u) & = & (1+2\times 1-2\times 1, 2\times 1+1-2\times 1, 2\times 1+2\times 1-3\times 1)\\ & = & (1,1,1)\\ & = & u\\ f(v) & = & (0+2\times 1-2\times 1, 2\times 0+1-2\times 1, 2\times 0+2\times 1-3\times 1)\\ & = & (0,-1,-1)\\ & = & -v\\ f(w) & = & (1+2\times 1-2\times 2, 2\times 1+1-2\times 2, 2\times 1+2\times 1-3\times 2)\\ & = & (-1,-1,-2)\\ & = & -w\end{array}$$

Q4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On note $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
La famille $\mathcal{B}$ étant une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, par théorème, on a :

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3) & \Leftrightarrow & (M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}))\\ & \Leftrightarrow & (\mathrm{rg}(M) = 3)\end{array}$$

On obtient le rang de M par échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Par suite, $\mathrm{rg}(M) = 3$ ce qui assure que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q5. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} f(u) & = & u\\ f(v) & = & -v\\ f(w) & = & -w\end{array}\right.$

Par suite, la matrice D de f dans $\mathcal{B}$ est donc : $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Q6. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Éléments de correction

Puisque f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, d'après le théorème de caractérisation des automorphismes :

$$\left(f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3\right) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{rg}\,(f) = 3)$$

Or le rang de f est égal au rang de l'une quelconque de ses représentations matricielles.
Ainsi, ici $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(D)$, qui est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont non nuls, c'est à dire que $\mathrm{rg}\,(D) = 3$, et on a que $\mathrm{rg}\,(f) = 3$, ce qui assure que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q7. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}$, puis une relation liant A, D et P.

Éléments de correction

Par définition de la matrice de passage entre deux bases, on a : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

D'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes, on a : $A = PDP^{-1}$.

Partie B | Rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$

On note $\mathcal{B}_4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Dans cette partie, f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ défini par les relations : $\left\{ \begin{array}{lclll} f\,(e_1) & = & -e_1 & -2e_3 & -e_4 \\ f\,(e_2) & = & -e_1 & & \\ f\,(e_3) & = & & -e_3 & \\ f\,(e_4) & = & & e_3 & \end{array} \right.$

Q8. Déterminer $f\,(e_1 + e_3 + e_4)$.

Éléments de correction

Par linéarité de f, on a : $\begin{array}{rcl} f\,(e_1 + e_3 + e_4) & = & -e_1 - 2e_3 - e_4 - e_3 + e_3 \\ & = & -e_1 - 2e_3 - e_4 \end{array}$

Q9. Sans justification, donner la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

Les relations définissant f donnent directement que : $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q10. Déterminer l'image par f du vecteur $e_3 + e_4$. Comment interpréter ce résultat ?

Éléments de correction

Par linéarité de f, on a : $\begin{array}{rcl} f\,(e_3 + e_4) & = & f\,(e_3) + f\,(e_4) \\ & = & -e_3 + e_4 \\ & = & \overrightarrow{0} \end{array}$

et par suite, on en déduit que $e_3 + e_4 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
Par suite, le noyau de f n'étant pas réduit au vecteur nul, f n'est pas injective, et donc n'est pas bijective.

Q11. Déterminer un vecteur $v = (x, y, z, 1) \in \mathbb{R}^4$ tel que $e_3 + e_4 = f\,(v)$.

Éléments de correction

Soit $v = (x, y, z, 1)$.

Par définition de f et linéarité de f on a : $$\begin{aligned} f(v) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + e_4) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + f(e_4) \\ &= x(-e_1 - 2e_3 - e_4) - ye_1 - ze_3 + e_3 \\ &= (-x-y)e_1 + (-2x - z + 1)e_3 - xe_4 \end{aligned}$$

Par suite, on a : $$(e_3 + e_4 = f(v)) \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ -2x - z + 1 = 1 \\ -x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

et par suite $v = (-1, 1, 2, 1)$.

Q12. On considère $F = \left\{u \in \mathbb{R}^4,\ f(u) = -u\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

$F \subset \mathbb{R}^4$ **:** par construction de f

$\overrightarrow{0} \in F$ **:** en effet, par linéarité de f, on a $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$ et il est trivial que $-\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} u_1 \in F \\ u_2 \in F \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$

On pose $u_3 = \lambda u_1 + u_2$ et montrons que $u_3 \in F$ c'est à dire que $f(u_3) = -u_3$.

Par linéarité de f, on a : $$\begin{aligned} f(u_3) &= f(\lambda u_1 + u_2) \\ &= \lambda \underbrace{f(u_1)}_{\substack{=-u_1 \\ \text{car } u_1 \in F}} + \underbrace{f(u_2)}_{\substack{=-u_2 \\ \text{car } u_2 \in F}} \\ &= -\lambda u_1 - u_2 \\ &= -u_3 \end{aligned}$$

et ainsi F est stable par combinaison linéaire.

Concusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q13. Montrer que F est de dimension 1 et déterminer un vecteur $w = (x, y, 1, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $F = \text{Vect}(w)$.

Éléments de correction

Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned}
(w=(x,y,z,t)\in F) &\Leftrightarrow (f(w)=-w)\\
&\Leftrightarrow (f(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)=-xe_1-ye_2-ze_3-te_4)\\
&\Leftrightarrow (xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)+tf(e_4)=-xe_1-ye_2-ze_3-te_4)\\
&\Leftrightarrow (x(-e_1-2e_3-e_4)-ye_1-ze_3+te_3=-xe_1-ye_2-ze_3-te_4)\\
&\Leftrightarrow ((-x-y)e_1+(-2x-z+t)e_3-xe_4=-xe_1-ye_2-ze_3-te_4)\\
&\Leftrightarrow \left(-ye_1+ye_2-(2x+t)e_3+(-x+t)e_4=\overrightarrow{0}\right)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -y=0\\ y=0\\ 2x+t=0\\ -x+t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x=t\\ 2x+t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x=t\\ 3t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y=0\\ x=t\\ t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=z\\ t=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow (w=(0,0,z,0))\\
&\Leftrightarrow (w\in \mathrm{Vect}\,((0,0,1,0)))
\end{aligned}$$

Par suite, il vient que $F=\mathrm{Vect}\,((0,0,1,0))$ ce qui assure que F est une droite vectorielle et donc un espace de dimension 1, et on prend $w=(0,0,1,0)$.

Q14. Montrer que la famille $\mathcal{B}=\{e_3+e_4,v,w,(1,0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

En notant M la matrice de la famille $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_4$ de $\mathbb{R}^4$, puisque $\mathcal{B}$ est une famille de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui est de dimension 4, par théorème :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}\text{ est une base de }\mathbb{R}^4) &\Leftrightarrow (M\in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}))\\
&\Leftrightarrow (\mathrm{rg}(M)=4)
\end{aligned}$$

Par définition de M, on a : $M=\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&1&0&0\\1&2&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$

On cherche alors le rang de M par échelonnement réduit en lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 1L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(M) = 4$, et donc la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^4$.

Q15. Déterminer alors la matrice B de f dans $\mathcal{B}$.

Éléments de correction

Tout d'abord, par linéarité de f, il vient :

D'après ce qui précède, on a : $\left\{\begin{array}{rcr} f(e_3+e_4) & = & \overrightarrow{0} \\ f(v) & = & e_3+e_4 \\ f(w) & = & -w \\ f((1,0,1,1)) & = & -e_1-2e_3-e_4 \\ & = & -e_1-e_3-e_4-e_3 \\ & = & -e_3-(1,0,1,1) \\ & = & w-(1,0,1,1) \end{array}\right.$

Par suite, la matrice B de f dans $\mathcal{B}$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Q16. Quel est alors le rang de f ?

Éléments de correction

Le rang de f étant le rang de l'une quelconque de ses représentations matricielles, on en déduit que $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(B)$.
Un échelonnement en lignes donne directement que $\operatorname{rg}(B) = 3$.
Par suite, on en déduit que $\operatorname{rg}(f) = 3$.

Problème 2 | Exponentielle de matrice

On considère les matrices à coefficients réels $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

On désigne alors par E le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{aM_1 + bM_2,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

On admet par ailleurs que $M_1M_2 = (0)$ et $M_2M_1 = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Partie A | Structure vectorielle de E

Q17. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Éléments de correction

Par construction de E, il est immédiat que $E = \text{Vect}\,(M_1, M_2)$ qui est ainsi par théorème un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Q18. Donner alors une base et la dimension de E.

Éléments de correction

On a déjà que $E = \text{Vect}\,(M_1, M_2)$.
La famille $\{M_1, M_2\}$ étant clairement formée de deux vecteurs non nuls et non colinéaires, par théorème, cette famille est libre.
Par suite, la famille $\{M_1, M_2\}$ est une famille libre et génératrice de E, donc par définition en est une base, et comme elle est formée de deux vecteurs, on en déduit que E est de dimension 2.

Q19. Exprimer M_1^2 en fonction de M_1 et M_2^2 en fonction de M_2.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} M_1^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3M_1 \end{aligned}$$

De même :
$$\begin{aligned} M_2^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -6 & -12 \\ -6 & 6 & 12 \\ -12 & 12 & 24 \end{pmatrix} \\ &= 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 6M_2 \end{aligned}$$

Q20. Le produit de deux matrices quelconques de E est-il encore une matrice de E ?

Éléments de correction

Soient $N_1 \in E$ et $N_2 \in E$. Il existe donc $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $N_1 = a_1M_1 + b_1M_2$ et $N_2 = a_2M_1 + b_2M_2$.
On a donc :
$$\begin{aligned} N_1 \times N_2 &= (a_1M_1 + b_1M_2)(a_2M_1 + b_2M_2) \\ &= a_1a_2 \underbrace{M_1^2}_{=3M_1} + a_1b_2 \underbrace{M_1M_2}_{=(0)} + b_1a_2 \underbrace{M_2M_1}_{=(0)} + b_1b_2 \underbrace{M_2^2}_{=6M_2} \\ &= 3a_1a_2M_1 + 6b_1b_2M_2 \end{aligned}$$
En posant $a = 3a_1a_2$ et $b = 6b_1b_2$, il vient que $N_1 \times N_2 = aM_1 + bM_2$ et donc que $N_1 \times N_2 \in E$, et par suite, le produit de deux éléments de E, est encore un élément de E.

Partie B | Exponentielle d'un élément de E

Dans cette partie, on considère une matrice $M = aM_1 + bM_2$ quelconque de E où $(a, b) \in \mathbb{R}$.

On définit alors la suite de matrices $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$ avec la convention $M^0 = \mathrm{I}_3$.

On rappelle par ailleurs que la série numérique $\sum \frac{x^k}{k!}$ est convergente pour tout réel x, et que l'on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^{x}$.

Q21. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = 3^{n-1}a^n M_1 + 6^{n-1}b^n M_2$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = 3^{n-1}a^n M_1 + 6^{n-1}b^n M_2$ ».
Montrons, par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : il est clair que :

$$\begin{aligned} 3^{1-1}a^1 M_1 + 6^{1-1}b^1 M_2 &= 3^0 a M_1 + 6^0 b M_2 \\ &= aM_1 + bM_2 \\ &= M \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$ et qui est donc vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Il est immédiat que : $M^{n+1} = M^n \times M$.
Ainsi, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= \left(3^{n-1}a^n M_1 + 6^{n-1}b^n M_2\right)(aM_1 + bM_2) \\ &= 3^{n-1}a^{n+1} \underbrace{M_1^2}_{=3M_1} + 3^{n-1}a^n b \underbrace{M_1 M_2}_{=(0)} + 6^{n-1}b^n a \underbrace{M_2 M_1}_{=(0)} + 6^{n-1}b^{n+1} \underbrace{M_2^2}_{=6M_2} \\ &= 3^n a^{n+1} M_1 + 6^n b^{n+1} M_2 \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q22. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ des sommes $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}a^k}{k!}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{6^{k-1}b^k}{k!}$.

Éléments de correction

Limite en $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}a^k}{k!}$: un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}a^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k a^k}{3 \times k!} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{(3a)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(3a)^k}{k!} - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(3a)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{3a}$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}a^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3}$

Limite en $+\infty$ de $\sum_{k=1}^{n} \frac{6^{k-1}b^k}{k!}$: un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{6^{k-1}b^k}{k!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{6^k b^k}{6 \times k!} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \frac{(6b)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(6b)^k}{k!} - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(6b)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{6b}$, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \frac{6^{k-1}b^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{6b} - 1}{6}$

Q23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux réels α_n et β_n tel que $S_n = \mathrm{I}_3 + \alpha_n M_1 + \beta_n M_2$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite de matrices $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\
&= \frac{1}{0!}\mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\
&= \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(3^{k-1}a^k M_1 + 6^{k-1} b^k M_2\right) \\
&= \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^{k-1}a^k}{k!} M_1 + \frac{6^{k-1}b^k}{k!} M_2\right) \\
&= \mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3^{k-1}a^k}{k!} M_1\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6^{k-1}b^k}{k!} M_2\right) \\
&= \mathrm{I}_3 + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}a^k}{k!}\right)}_{=\alpha_n} M_1 + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{6^{k-1}b^k}{k!}\right)}_{\beta_n} M_2
\end{aligned}$$

Q24. Donner alors les limites notées respectivement α et β des suites de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies à la question précédente.

Éléments de correction

D'après les questions précédentes, on en déduit que $\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3}$ et $\beta = \dfrac{\mathrm{e}^{6b} - 1}{6}$.

Q25. Pour toute matrice M de E, on définit alors la matrice e^{M} par : $\mathrm{e}^{M} = \mathrm{I}_3 + \alpha M_1 + \beta M_2$ où α et β sont les limites des deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construites dans les questions précédentes et qui dépendent de M.

Montrer alors que : $\forall (M, M') \in E \times E,\ \mathrm{e}^{M} \times \mathrm{e}^{M'} = \mathrm{e}^{M+M'}$.

Éléments de correction

En reprenant les notations précédentes, on a : $\mathrm{e}^{M} = \mathrm{I}_3 + \alpha M_1 + \beta M_2$ et $\mathrm{e}^{M'} = \mathrm{I}_3 + \alpha' M_1 + \beta' M_2$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{M} \times \mathrm{e}^{M'} &= (\mathrm{I}_3 + \alpha M_1 + \beta M_2)(\mathrm{I}_3 + \alpha' M_1 + \beta' M_2) \\
&= \mathrm{I}_3 + \alpha' M_1 + \beta' M_2 + \alpha M_1 + \alpha\alpha' \underbrace{M_1^2}_{=3M_1} + \alpha\beta' \underbrace{M_1 M_2}_{=(0)} + \beta M_2 + \beta\alpha' \underbrace{M_2 M_1}_{=(0)} + \beta\beta' \underbrace{M_2^2}_{=6M_2} \\
&= \mathrm{I}_3 + (\alpha + \alpha' + 3\alpha\alpha)' M_1 + (\beta + \beta' + 6\beta\beta') M_2
\end{aligned}$$

En notant : $M + M' = (a + a')M_1 + (b + b')M_2$, on a : $\mathrm{e}^{M+M'} = \mathrm{I}_3 + \alpha'' M_1 + \beta'' M_2$ avec $\alpha'' = \dfrac{\mathrm{e}^{3(a+a')} - 1}{3}$ et $\beta'' = \dfrac{\mathrm{e}^{6(b+b')} - 1}{6}$ compte-tenu des questions précédentes.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\alpha + \alpha' + 3\alpha\alpha' &= \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3} + \frac{\mathrm{e}^{3a'} - 1}{3} + 3 \times \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3} \times \frac{\mathrm{e}^{3a'} - 1}{3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3} + \frac{\mathrm{e}^{3a'} - 1}{3} + \frac{\left(\mathrm{e}^{3a} - 1\right)\left(\mathrm{e}^{3a'} - 1\right)}{3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1}{3} + \frac{\mathrm{e}^{3a'} - 1}{3} + \frac{\mathrm{e}^{3a+3a'} - \mathrm{e}^{3a} - \mathrm{e}^{3a'} + 1}{3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3a} - 1 + \mathrm{e}^{3a'} - 1 + \mathrm{e}^{3a+3a'} - \mathrm{e}^{3a} - \mathrm{e}^{3a'} + 1}{3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{3(a+a')} - 1}{3}
\end{aligned}$$

Un calcul semblable donnerait que : $\beta + \beta' + 6\beta\beta' = \dfrac{\mathrm{e}^{6(b+b')} - 1}{6}$

et par suite que l'on a bien $e^{M} \times e^{M'} = e^{M+M'}$.

Problème n° 3 | Intégrales de Wallis et séries numériques

Dans tout ce problème, on désigne par $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite dont le terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \, \mathrm{d}t$$

On considère par ailleurs la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$.

Partie A | Convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q26. Calculer I_0 et I_1.

Éléments de correction

Calcul de I_0 : par définition de I_0, on a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^0 \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, \mathrm{d}t \\ &= [t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Calcul de I_1 : par définition de I_1, on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^1 \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \, \mathrm{d}t \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Q27. On rappelle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.

À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, \mathrm{d}t$

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de I_n, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^n \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

On effectue le changement de variables $u = \dfrac{\pi}{2} - t$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^n \mathrm{d}t$ à l'aide des relations :

$u = \dfrac{\pi}{2} - t$ et $\mathrm{d}u = (-1)\,\mathrm{d}t$ ou encore $(-1)\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$

Pour $t = 0$, on a $u = \dfrac{\pi}{2}$

Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, on a $u = 0$

Il vient alors :
$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin(u))^n \times (-1)\,\mathrm{d}u \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin(u))^n\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(u))^n\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Q28. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \cos(t) \geq 0$

et par suite que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ (\cos(t))^n \geq 0$

La fonction $t \longmapsto (\cos(t))^n$ étant continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par positivité de l'intégrale, il vient que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\ \mathrm{d}t \geq 0$, et par suite que $I_n \geq 0$.

Q29. Justifier de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
La fonction $t \longmapsto (\cos(t))^n$ étant continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et positive sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, si l'on avait $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\ \mathrm{d}t = 0$, par théorème, on aurait que la fonction $t \longmapsto (\cos(t))^n$ est identiquement nulle, ce qui n'est trivialement pas le cas.

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier le signe de l'expression $(\cos(t))^n(\cos(t) - 1)$ lorsque $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On sait que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ \cos(t) \geq 0$

et par suite que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ (\cos(t))^n \geq 0$.

Par ailleurs, on sait que : $\forall t \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(t) \leq 1$.
Par suite, on en déduit que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) - 1 \geq 0$
Ainsi, par produit, on en déduit que : $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ (\cos(t))^n(\cos(t) - 1) \leq 0$.

Q31. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n+1}\ \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{n+1} - (\cos(t))^n\right)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n(\cos(t) - 1)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, la fonction $t \longmapsto (\cos(t))^n(\cos(t) - 1)$ est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc par

positivité de l'intégrale il vient que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n (\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t \leq 0$.
Ainsi, il vient que : $I_{n+1} - I_n \leq 0$
Par définition, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Q32. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Éléments de correction

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 0, par théorème, elle est convergente.

Partie B | Recherche d'une expression de I_n

Q33. Exprimer, sans justification, $(\sin(t))^2$ en fonction de $(\cos(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Éléments de correction

On sait que : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 = 1$
Ainsi, on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ (\sin(t))^2 = 1 - (\cos(t))^2$

Q34. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ n \times I_n = (n-1)\times I_{n-2}$

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

Par définition de I_n, on a :
$$\begin{aligned} I_n &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,(\cos(t))^{n-1}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
On effectue alors l'intégration par parties suivante :
$$\begin{array}{lcl} u(t) = \sin(t) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = \cos(t) \\ v(t) = (\cos(t))^{n-1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = (n-1)\times(-\sin(t))\times(\cos(t))^{n-2} \end{array}$$
où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :
$$\begin{aligned} I_n &= \underbrace{\Big[\sin(t)\times(n-1)\times(-1)\times(\cos(t))^{n-2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0 \text{ car } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{ et } \sin(0)=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\times(n-1)\times(-1)\times(\cos(t))^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2(\cos(t))^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-(\cos(t))^2\right)(\cos(t))^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((\cos(t))^{n-2} - (\cos(t))^n\right)\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{n-2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n\,\mathrm{d}t\right) \\ &= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$
Ainsi, on a : $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$
c'est à dire que : $I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2}$
et donc que : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Q35. On considère alors que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = (n+1)I_{n+1}I_n$.

Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, et préciser sa valeur.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Par définition de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \underbrace{(n+2)I_{n+2}}_{=(n+1)I_n} I_{n+1} \\ &= (n+1)I_nI_{n+1} \\ &= J_n \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme $J_0 = (0+1)I_1I_0$, c'est à dire $J_0 = \frac{\pi}{2}$.

Q36. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}}{\frac{(2n)!}{4^n\left(n!\right)^2}} \\ &= \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2} \times \frac{4^n\left(n!\right)^2}{(2n)!} \\ &= \frac{4^n}{4^{n+1}} \times \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n! \times n!}{(n+1)! \times (n+1)!} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)\times(2n+1)\times(2n)!}{(2n)!} \times \frac{n!\times n!}{(n+1)\times n! \times (n+1) \times n!} \\ &= \frac{1}{4} \times (2n+2)(2n+1) \times \frac{1}{(n+1)\times(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2n+1}{n+1} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \end{aligned}$$

Q37. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer le quotient $\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$ en fonction de a_{n+1} et a_n.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a directement que :

$$\begin{aligned} \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} &= \frac{(2n+2)I_{2n+2}}{(2n+2)I_{2n}} \\ &= \frac{(2n+1)I_{2n}}{(2n+2)I_{2n}} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2} \\ &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{aligned}$$

Q38. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \frac{\pi}{2}a_n$.

On pourra s'intéresser à la suite de terme général $\frac{I_{2n}}{a_n}$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a la relation suivante : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{2n}}{a_n} = \dfrac{I_{2n+2}}{a_{n+1}}$

Par conséquent, la suite de terme général $\dfrac{I_{2n}}{a_n}$ est constante, égale à son premier terme $\dfrac{I_0}{a_0} = \dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} a_n$.

Q39. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} = 1$.

Éléments de correction

Sur le même principe que précédemment, on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \dfrac{2n}{2n+1}$ et $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$.

Par suite, il vient que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{aligned}\frac{(2n+1)I_{2n+1}a_n}{(2n-1)I_{2n-1}a_{n-1}} &= \frac{2n+1}{2n-1} \times \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-1}{2n} \\ &= 1\end{aligned}$$

Q40. En déduire alors que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)a_n}$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, la suite de terme général $(2n+1)I_{2n+1}a_n$ est constante égale à son premier terme, qui vaut 1.

Par suite, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)I_{2n+1}a_n = 1$

ce qui amène à : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)a_n}$.

Partie C | Étude du comportement en $+\infty$ de I_n

Q41. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ 1 \leq \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.

Éléments de correction

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leq I_{n-1}$

et ainsi, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \dfrac{I_{n-1}}{I_n}$.

Toujours par décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ I_{n-1} \leq I_{n-2}$

et comme $I_n > 0$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.

Par suite, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ 1 \leq \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.

Q42. Déterminer la limite des suites de terme général $\dfrac{I_{n-2}}{I_n}$ et $\dfrac{I_{n-1}}{I_n}$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ n \times I_n = (n-1) \times I_{n-2}$

et donc on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ \dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$

Il est immédiat que $\dfrac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc que $\dfrac{I_{n-2}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par ailleurs d'après le théorème d'encadrement on a, que $\dfrac{I_{n-1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q43. Montrer alors que $n \times (I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\quad n\times(I_n)^2 = n \times I_n \times I_n = n \times I_n \times I_{n-1} \times \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = \dfrac{\pi}{2} \times \underbrace{\dfrac{I_n}{I_{n-1}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$

et donc il vient que $n \times (I_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Partie D | Étude de la série $\sum a_n$ et applications

Q44. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \times (I_n)^2 \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Éléments de correction

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq I_{n-1}$.
Par suite, puisque $I_n > 0$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \underbrace{n \times I_n \times I_n}_{=n(I_n)^2} \leq \underbrace{n \times I_n \times I_{n-1}}_{=\frac{\pi}{2}}$

Q45. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leq a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\pi}{2}a_n = I_{2n} \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2\times 2n}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$

et par conséquent, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leq \underbrace{\dfrac{2}{\pi} \times \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}}_{=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$.

De même, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} \geq \dfrac{1}{2n+1}\sqrt{\dfrac{2\times(2n+1)}{\pi}} = \sqrt{\dfrac{2}{(2n+1)\pi}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}$

Q46. Montrer que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ sont de même nature.

Conclure quant à la convergence de la série $\sum a_n$.

On pourra commencer par déterminer la limite de la suite de terme général $a_n\sqrt{\pi}\sqrt{n}$ pour déterminer un équivalent de a_n.

Éléments de correction

D'après la question précédente, il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{n}a_n \leq 1.$

Étant immédiat que $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il vient que $\sqrt{\pi}\sqrt{n}a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, autrement dit que $\dfrac{a_n}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

et donc que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

On a ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$
- $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$
- la série de terme général $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann divergente, donc la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ est divergente.

donc d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, les séries $\sum a_n$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$ sont de même nature, et ici divergentes toutes les deux.

Q47. Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{4n+1}$ est convergente.

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$.

On en déduit donc que : $\dfrac{a_n}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}\times n\sqrt{n}}$

On a ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a_n}{4n+1} \geq 0$
- $\dfrac{a_n}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}\times n\sqrt{n}}$
- la série de terme général $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente, donc la série $\sum \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}\times n\sqrt{n}}$ est convergente.

donc d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, les séries $\sum \dfrac{a_n}{4n+1}$ et $\sum \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}\times n\sqrt{n}}$ sont de même nature, et ici convergentes toutes les deux.

Q48. En est-il de même pour la série $\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$?

Éléments de correction

Puisque la série $\sum \dfrac{a_n}{4n+1}$ est convergente, on en déduit que la série $\sum \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ est absolument convergente, donc par théorème, convergente.