Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question…**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème nº 1 | Tirage dans des urnes | Extrait BCE 2014 Filière BL

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dispose de $n+1$ urnes désignées par $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$.
Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_j$ contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j.
On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise, selon le protocole suivant :

- Au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne $\mathcal{U}_n$.
- À l'issue du premier tirage, si on obtient la boule numérotée $j \in [\![0;n]\!]$, le second tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_j$.
- On continue alors les tirages selon la même règle : pour tout entier naturel k non nul, on tire une boule avec remise au k^{e} tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)^{\text{e}}$ s'effectue alors, avec remise, dans l'urne $\mathcal{U}_j$.

Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k^{e} tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne $\mathcal{U}_n$, on pose $X_0 = n$.

Pour tout entier naturel k, on considère la matrice colonne W_k de $\mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_k = 0]) \\ \mathbb{P}([X_k = 1]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X_k = n]) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$ respectivement, l'espérance et la variance de X_k.

Partie A | Préliminaire technique

Q1. Démontrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Q2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1$.

Q3. À l'aide de sommes téléscopiques, en déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie B | Étude d'un cas particulier

Dans ce partie uniquement, on se place dans le cas $n = 3$, c'est à dire que l'on dispose de 4 urnes $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$.

Q4. Justifier que X_k prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$.

Q5. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{[X_0=3]}\left([X_1=1]\right)$ et $\mathbb{P}_{[X_0=2]}\left([X_1=2]\right)$.

Q6. Que dire de l'événement $[X_4=1] \cap [X_5=3]$?

Q7. À l'aide du système complet d'événements $\{[X_2=0], [X_2=1], [X_2=2], [X_2=3]\}$, exprimer $\mathbb{P}\left([X_3=2]\right)$ en fonction de $\mathbb{P}\left([X_2=2]\right)$ et $\mathbb{P}\left([X_2=3]\right)$.

Partie C | Recherche de la loi de X_k

Dans cette partie, k désigne un entier naturel.

Q8. Dans quel ensemble X_k prend t-il ses valeurs ?

Q9. Que dire des événements $[X_k=p] \cap [X_{k+1}=j]$ où $p \in \{0,1,2,\ldots,j-1\}$?

Q10. Pour tout $j \in [\![0;n]\!]$, montrer que : $\quad \mathbb{P}\left([X_{k+1}=j]\right) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{\mathbb{P}\left([X_k=i]\right)}{i+1}$.

Q11. En déduire la relation : $\quad W_{k+1} = AW_k$.

Partie D | Calcul de l'espérance de X_k

Dans cette partie, k désigne un entier naturel.

Q12. Montrer que $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ vérifie que $BW_k = \mathbb{E}\left(X_k\right)$ en identifiant les matrices de taille 1×1 avec $\mathbb{R}$.

Q13. Montrer que $BA = \dfrac{1}{2}B$.

Q14. Exprimer, pour tout entier naturel k, $\mathbb{E}\left(X_{k+1}\right)$ en fonction de $\mathbb{E}\left(X_k\right)$.

Q15. En déduire l'expression de $\mathbb{E}\left(X_k\right)$ en fonction de k et n.

Partie E | Calcul de la variance de X_k

Q16. Montrer que $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & \ldots & n^2 \end{pmatrix}$ vérifie $CW_k = \mathbb{E}\left(X_k^2\right)$.

Q17. On admet que que $CA = \dfrac{1}{3}C + \dfrac{1}{6}B$.
Pour tout entier naturel k, montrer que $\mathbb{E}\left(X_{k+1}^2\right) = \dfrac{1}{3}\mathbb{E}\left(X_k^2\right) + \dfrac{1}{6}\mathbb{E}\left(X_k\right)$.

Q18. Pour tout entier naturel k, on pose $u_k = \mathbb{E}\left(X_k^2\right) - \dfrac{n}{2^k}$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

Q19. En déduire l'expression de $\mathbb{E}\left(X_k^2\right)$ en fonction de k et n.

Q20. Quelle peut être la signification du symbole présent après quelques numéros de question ?

Q21. Exprimer $\mathbb{V}\left(X_k\right)$ en fonction de k et n.

Problème n° 2 | Couple de variables aléatoires | Extrait ESCP 2018 Filière ECT

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher.

Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche indiscernables ou toucher.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n^{e} expérience, c'est à dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geq 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement « tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k^{e} tirage ».

On rappelle par ailleurs que l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1;N]\!]$ valent respectivement $\dfrac{N+1}{2}$ et $\dfrac{N^2-1}{12}$.

Partie A | Loi de X_1

Q22. Justifier que l'on a $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.

Q23. Déterminer la loi de X_1.

Q24. En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.

Partie B | Loi de X_2

Q25. Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$ en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2.

Q26. Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1;3]\!]$.

Q27. En déduire $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Partie C | Loi du couple (X_1, X_2)

Q28. Donner sans justification, sous forme de tableau, la loi conjointe du couple (X_1, X_2).

Q29. Calculer la covariance de X_1 et X_2.

Q30. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Partie D | Loi de X_n

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Q31. Exprimer l'événement $[X_n = 1]$ en fonction des événements B_1, B_2, …, B_n.

Q32. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \dfrac{1}{n+1}$.

Q33. Réaliser le croquis d'une marmite sur le feu dans laquelle vous y feriez bien cuire le concepteur du sujet.

Q34. Déterminer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$.

Q35. Établir pour tout entier $k \in [\![2; n+2]\!]$, les égalités suivantes :

$$\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}\left([X_{n+1}=k]\right) = \frac{k-1}{n+2} \text{ et } \mathbb{P}_{[X_n=k]}\left([X_{n+1}=k]\right) = \frac{n+2-k}{n+2}$$

Q36. En déduire pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, une relation entre $\mathbb{P}\left([X_{n+1}=k]\right)$, $\mathbb{P}\left([X_n=k]\right)$ et $\mathbb{P}\left([X_n=k-1]\right)$.

Q37. À l'aide du raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n suit la loi uniforme sur $[\![1; n+1]\!]$.

Partie E | Comparaison des lois de X_n et Y_n

Q38. Justifier que les variables aléatoires X_n et Y_n sont de même loi.

Q39. Montrer que $X_n + Y_n = n+2$. En déduire $\mathbb{V}\left(X_n + Y_n\right)$.

Q40. En déduire une expression de $\mathrm{Cov}\left(X_n, Y_n\right)$ en fonction de $\mathbb{V}\left(X_n\right)$ et $\mathbb{V}\left(Y_n\right)$.

Q41. Montrer que le coefficient de corrélation linéaire du couple (X_n, Y_n) est égal à -1.