Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Je vous l'avais promis

On considère l'application f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, -x+y, x+y+2z) \end{array} \right.$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q2. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
Vérifier par ailleurs que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$.

Q3. Déduire de ce qui précède une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Q4. À l'aide du théorème du rang, déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Q5. Déterminer[1] une base du noyau de f.

Problème n° 2 | Application directe du cours | Automatismes de calcul

Partie A | Étude d'une famille de vecteurs

On considère la famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Q6. Explicitez les quatre vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de cette famille.

Q7. On peut montrer que : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \cdots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Qu'en déduire pour $\mathcal{F}$? Justifier.

Q8. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$ engendré par la famille $\mathcal{F}$?

Q9. Déterminer alors une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

Q10. En déduire une base de $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

1. Ceux qui ne remarqueront pas que la question **Q2** contient la réponse à cette question, emploieront la méthode habituelle portant sur la résolution d'un système

Partie B | Noyau et image d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, et l'échelonnement réduit en lignes suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & \dots \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ -1 & -3 & -2 & -3 & \dots \\ -2 & -2 & 0 & -2 & \dots \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & \dots \\ 0 & -3 & -3 & -3 & \dots \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + 2L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & \dots \\ 0 & -3 & -3 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -3 & -3 & -3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}\right)$$

Q11. À l'aide de ce dernier, déterminer une base du noyau de A.

Q12. Toujours en utilisant cet échelonnement caractériser les éléments de $\mathrm{Im}\,(A)$ par une ou plusieurs équations.

Q13. Donner alors une base de $\mathrm{Im}\,(A)$.

Partie C | Noyau et image d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ donné par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, 2x+y+z, x-y) \end{array} \right.$
et l'échelonnement réduit en lignes suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q14. En utilisant cet échelonnement déterminer une base du noyau de f.

Q15. Déterminer, en le justifiant, le rang de f.

Q16. Donner alors, en justifiant votre réponse, une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Partie D | Exploiter le caractère linéaire d'une application

On note $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ la base canonique[2] de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On considère alors f un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$f(M_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ f(M_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ f(M_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Q17. En utilisant la linéarité de f, calculer $f(M_1 + M_2 - M_3)$. Qu'en déduire pour f et $M_1 + M_2 - M_3$?

2. Il n'est pas utile ici d'expliciter complètement les matrices M_1, M_2, M_3 et M_4.

CC BY NC ND

Q18. Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{f(M_1), f(M_2), f(M_3), f(M_4)\}$ n'est pas libre[3].

Q19. On donne l'échelonnement en lignes suivant : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer alors une base de $\mathrm{Im}(f)$. Justifier votre réponse.

Q20. En déduire le rang de f, puis la dimension du noyau de f.

Q21. À l'aide des questions précédentes, et sans aucun calcul supplémentaire, donner enfin une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Problème n° 3 | Étude d'un sous-espace de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans tout ce problème, A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère $F = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ AM + A^2M = 2A^3M\right\}$.

Q22. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q23. Déterminer A^2 et A^3.

Q24. La matrice I_2 appartient-elle à F ? Justifier votre réponse.

Q25. Montrer que : $\left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array} \right.$.

Q26. Déterminer alors une base $\mathcal{B}$ de F.

Problème n° 4 | Étude d'un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans ce problème, A_1, A_2, A_3 et A_4 désignent des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la famille $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On considère alors l'application f donnée par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+b)A_1 + (b+c)A_2 + (c+d)A_3 + (d+a)A_4 \end{array} \right.$$

et on admet que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et on rappelle que $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ où $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q27. Montrer que la famille $\mathcal{A}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q28. Déterminer les images par f des vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction des éléments de $\mathcal{A}$.

Q29. En déduire une famille génératrice $\mathcal{F}$ de $\mathrm{Im}(f)$.

Q30. La famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de $\mathrm{Im}(f)$? Justifier votre réponse.

Q31. f est-il un automorphisme ? Justifier votre réponse.

3. Je vous invite à chercher une relation de dépendance triviale entre ces matrices