Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Problème nº 1 | Deux calculs de sommes de série

Partie A | Une première série

On se propose dans cette partie d'établir la convergence, puis de calculer la somme de la série $\sum u_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n!}$$

On désigne par $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Q1. Donner, sans justification, la valeur de la somme de la série $\sum \frac{1}{n!}$.

Q2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 2n^2 - 3n + 1 = an(n-1) + bn + c$

Q3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{1}{n!} + 2\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}$.

Q4. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum u_n$.

Partie B | Une deuxième série

On se propose dans cette partie d'établir la convergence, puis de calculer la somme de la série $\sum v_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{n^2 + n + 1}{2^n}$$

On désigne par $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Q5. Donner, sans justification, la valeur des sommes des séries $\sum q^n$, $\sum nq^{n-1}$ et $\sum n(n-1)q^{n-2}$ et rappeler pour quelles valeurs de q ces dernières sont convergentes.

Q6. Développer l'expression $n(n-1) + 2n + 1$ où $n \in \mathbb{N}$.

Q7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ T_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^{k-1}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$.

Q8. Déduire de ce qui précède la convergence et la somme de la série $\sum v_n$.

Problème n° 2 | Calcul de la somme d'une série

On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence puis de déterminer la somme de la série $\sum u_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\; u_n = \frac{n+2}{n\,(n^2-1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Partie A | Étude d'une série intermédiaire

On s'intéresse dans cette partie à la convergence et à la somme de la série $\sum v_n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\; v_n = \dfrac{1}{n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

Q9. À l'aide du critère de d'Alembert, montrer que la série $\sum v_n$ est convergente.

Q10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de k l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{k-1}\,\mathrm{d}t.$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}$ où $t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Puis en déduire alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^{k-1}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$

Q12. Montrer alors que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\; \sum_{k=1}^{n} v_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

Q13. Justifier que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\; 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2^n\,(n+1)}$

Q14. Déduire de ce qui précède que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$

Q15. Qu'en conclure pour la série $\sum v_n$?

Partie B | Convergence de la série $\sum u_n$

Q16. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}.$

Q17. Justifier alors que la série $\sum u_n$ est convergente.

Partie C | Calcul de la somme de la série $\sum u_n$

On admet que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\; \frac{n+2}{n\,(n^2-1)} = -\frac{2}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{n-1}.$

On désigne par ailleurs $(S_n)_{n\geq 2}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, c'est à dire que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\; S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$

Q18. Montrer que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\; S_n = 1 - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k2^k} + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k2^k}.$

Q19. Déduire de ce qui précède la limite de la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, puis la somme de la série $\sum u_n$.