**Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

## Problème n° 1 | Variables aléatoires à densité

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $G$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)} \dfrac{1}{1+t} & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

**Q1.** Montrer que $f$ est une densité de probabilité.
Dans toute la suite de l'exercice, on désignera alors par $X$ une variable aléatoire de densité $f$ et on note $F$ la fonction de répartition.

**Q2.** Montrer que la variable aléatoire $X$ admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$.

**Q3.** Montrer que $X$ admet une variance, puis en remarquant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 = t(t+1) - t$, la calculer.

**Q4.** Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout $x$ réel.

**Q5.** Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue le réel $x$, admet une unique solution notée $x_0$ que l'on déterminera.

**Q6.** Soit $x \in [0;2]$. Établir l'équivalence : $\quad (f(t)f(x-t) \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\max(0, x-1) \leq t \leq \min(1, x))$.

**Q7.** Soit $x \in [0;2]$. On note $\varphi_x$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)(1+x-t)} & \text{si} \quad \max(0, x-1) \leq t \leq \min(1, x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet l'existence d'un unique couple $(A, B)$ de réels indépendants de $t$ pour lequel on a :

$$\forall t \in [\max(0,x-1); \min(1,x)], \; \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+x-t}$$

Montrer que $A = B = \dfrac{1}{x+2}$.

**Q8.** Soit alors $Y$ une variable aléatoire indépdendante de $X$, de même loi que $X$ et de densité $f$.
On pose $Z = X + Y$, et on admet que $Z$ est une variable aléatoire à densité.
On note $h$ une densité de la variable aléatoire $Z$, et on admet que $h$ est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose par ailleurs que $Z$ admet un moment d'ordre 2. Justifier l'existence, puis calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

**Q9.** Montrer que : $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2\,(\ln(2)-\ln(x))}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## Problème nº 2 | Suite définie par un produit

Dans tout l'exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels non tous nuls, et on associe à cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par : $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

On adopte la terminologie suivante :

- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie $p$ non nulle, on dit que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente ;
- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers $0$, on dit que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente ;
- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ n'est ni convergente ni bien convergente, on dit qu'elle est divergente.

### Partie A | Illustration de la construction d'une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ et des définitions

**Q10.** Dans chacun des cas suivants, exprimer $p_n$ en fonction de $n$ et en déduire la nature (convergence, bien convergente ou divergente) de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ :

**Cas nº 1 :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

**Cas nº 2 :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

**Cas nº 3 :** $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

### Partie B | Convergence d'une première suite $(p_n)_{n\geq 1}$

On suppose dans cette partie, que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par : $$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \end{cases}$$

**Q11.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$.

**Q12.** Déterminer ensuite les limites des suites $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en conclure alors pour $(p_n)_{n\geq 1}$ ?

### Partie C | Convergence d'une deuxième suite $(p_n)_{n\geq 1}$

On suppose dans cette partie, que $a$ est un réel donné tel que $0 < a < 1$ et que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + a^{(2^n)}$$

**Q13.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1 - a^2\right) p_n = 1 - a^{\left(2^{n+1}\right)}$.

**Q14.** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^{(2^n)} \leq a^n$.

**Q15.** En déduire la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ en fonction de $a$ et en préciser la nature (convergente, bien convergente, divergente).

### Partie D | Convergence dans un cadre plus général

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose dans cette partie que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + a_n$$

On définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \dfrac{a_n}{p_n}$.

**Q16.** Exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, $T_n$ en fonction de $p_n$ et $p_{n-1}$.

**Q17.** On suppose ici que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente de limite $p > 0$.

Montrer que la série de terme général $T_n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \frac{1}{p}$.

**Q18.** On suppose ici que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est divergente au sens de la définition donnée plus haut.

Montrer que la série de terme général $T_n$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$.

## Problème n° 3 | Coloration d'une figure

Dans ce problème, on désigne par $n$ et $p$ des entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $p \geq 2$.
Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels.
Pour $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $a_{ij}$ le coefficient situé à l'intersection de la $i$e ligne et de la $j$e colonne de la matrice $A$.

On rappelle que la trace de $A$, notée $\operatorname{tr}(A)$ est définie par : $\quad \operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ii}$.

Si $\lambda_1$, $\lambda_2$,…,$\lambda_p$ sont des réels, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Dans la première partie, on exprime la trace de la puisssane $n$e d'une matrice diagonalisable, en fonction des valeurs propres de cette matrice.

Dans la seconde partie, on étudie la coloration d'une figure.

### Partie I | Expression de la trace de $A^n$ si $A$ est diagonalisable

## Étude d'un exemple

Dans cette sous-partie, $A$ désignera la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Q19.** Vérifier que les valeurs propres de $A$ sont $-1$ et $2$.

**Q20.** Montrer que le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue une base du sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $2$, et que les vecteurs $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent une base du sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre de $-1$.

**Q21.** En déduire que la matrice $A$ est diagonalisable. Pour toute la suite de cette sous-partie, on note alors $D = \operatorname{diag}(-1, -1, 2)$.

**Q22.** On considère alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que l'on a : $P^3 - 2P^2 + 3P - 3\mathrm{I}_3 = (0)$.
Déterminer la matrice $P^{-1}$ inverse de la matrice $P$.

**Q23.** Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

**Q24.** En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

**Q25.** Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A^n) &= \mathrm{tr}\,(D^n) \\ &= 2(-1)^n + 2^n \end{aligned}$$

## Cas général

Dans cette section, $A$ désigne une matrice $p \times p$ supposée diagonalisable.

Il existe donc une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_p$ et une matrice $p \times p$ inversible $P$ telles que $A = PDP^{-1}$.

**Q26.** Montrer que si $U$ et $V$ sont deux matrices $p \times p$, alors $\mathrm{tr}(UV) = \mathrm{tr}(VU)$.

**Q27.** Justifier que :
$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{tr}\ (A^n) &= \mathrm{tr}\ (D^n) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n \end{aligned}$$

### Partie II | Une figure colorée

Dans toute la suite de ce problème, on étudie les colorations d'une figure notée $\mathcal{F}_n$ pour $n \geq 1$.

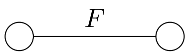
La figure $\mathcal{F}_1$ ou plus simplement $F$ est constituée de deux points ou sommets reliés entre eux.

Plus généralement, la figure $\mathcal{F}_n$ est constituée de $n$ copies de la figure $F$, notées $F_1, F_2, \ldots, F_n$ reliées entre elles et disposées de sorte qu'elles forment deux polygones à $n$ sommets.

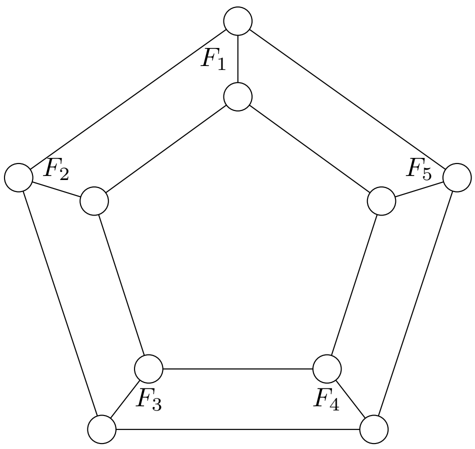
On notera abusivement $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$.

Une illustration représentant les figures $F$ et $\mathcal{F}_5 = (F_1, \ldots, F_5)$ est donnée ci-après.

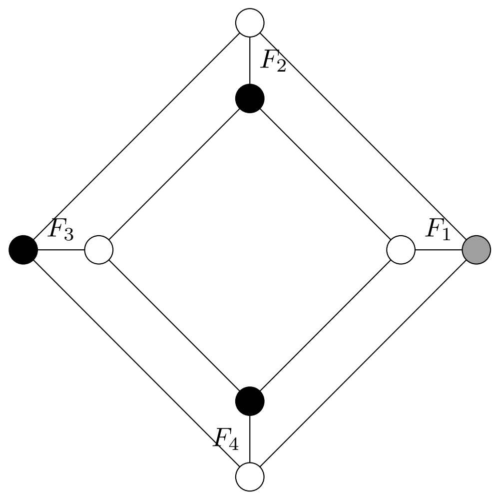
La figure $\mathcal{F}_1 = F$




La figure $\mathcal{F}_5$




Une coloration correcte de la figure $\mathcal{F}_4$




On dispose par ailleurs de trois couleurs, à savoir : blanc (notée $B$), gris (notée $G$) et noir notée ($N$).

Chaque sommet de $\mathcal{F}_n$ est coloré par une couleur choisie parmi $\{B, G, N\}$.

La coloration de la figure $\mathcal{F}_n$ sera dite correcte si deux sommets reliés dans la figure sont de couleurs différentes.

Une illustration d'une coloration correcte de $\mathcal{F}_4 = (F_1, \ldots, F_4)$ est donnée plus haut.

Par exemple, les colorations correctes de $F$ sont : $(B, G), (B, N), (G, N), (G, B), (N, B), (N, G)$.

On notera que les colorations $(B, G)$ et $(G, B)$ par exemple, sont différentes, ceci signifie que dans une coloration de la figure $\mathcal{F}_n$, les sommets sont supposés distingués les uns des autres.

Dans la suite de ce problème, on se donne une partie non vide $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ avec $2 \leq p \leq 6$, de l'ensemble des colorations correctes de $F$ qui est $\{(B, G), (B, N), (G, N), (G, B), (N, B), (N, G)\}$.

Pour obtenir une coloration correcte de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$, on commence par choisir des colorations correctes de chacune des copies $F_i$ avec $1 \leq i \leq n$ dans l'ensemble $C$.

On dit que deux éléments $c = (K_1, K_2)$ et $c' = (K_1', K_2')$ de $C$ sont compatibles si $K_1 \neq K_1'$ et $K_2 \neq K_2'$.

Par exemple, $c = (B, N)$ et $c' = (N, G)$ sont compatibles car $B \neq N$ et $N \neq G$ ; par contre, $c = (B, N)$ et $c' = (B, G)$ ne sont pas compatibles car $B = B$ et $N \neq G$.

Il en résulte que la coloration de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ sera correcte si, et seulement si, les colorations $F_1$ et $F_2$, $F_2$ et $F_3$, $\ldots$, $F_{n-1}$ et $F_n$, et aussi $F_n$ et $F_1$ sont compatibles.

## Probabilités

Dans cette question, on suppose $n \geq 2$ et on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que $\Omega$ est l'ensemble des figures $\mathcal{F}_n$ colorées (correctement ou non) avec $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$, et $\mathbb{P}$ est telle que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont colorées par un élément de $C$ avec équiprobabilité et indépendance.

**Q28.** Pour une coloration $c_i$ de $F_1$ avec $1 \leq i \leq p$, l'entier $i$ désigne l'indice de cette coloration.
Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $X$ donnant l'indice de la coloration de $F_1$ pour la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ ?
Quelles sont l'espérance et la variance de $X$ ?

**Q29.** Montrer que la variable aléatoire $Y$ donnant le nombre de $F_i$ avec $1 \leq i \leq n$ de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ ayant pour coloration l'élément $c_1$ de $C$ suit une loi usuelle que l'on déterminera.
Quelles sont l'espérance et la variance de $Y$ ?

## Matrice de compatibilité et nombre de colorations correctes

On introduit la matrice $p \times p$ de compatibilité associée à $C$, notée $A_C$ ou tout simplement $A$, dont les coefficients sont tels que :

$$\forall (i, j) \in [\![1; p]\!] \times [\![1; p]\!] , \ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_i \text{ et } c_j \text{ sont compatibles} \\ 0 & \text{si} \quad c_i \text{ et } c_j \text{ ne sont pas compatibles} \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas de la figure précédente illustrant une coloration correcte de $\mathcal{F}_4$, on a donc $n = 4$ et on prend $p = 3$ avec $c_1 = (B, G)$ correspondant à la coloration de $F_1$, $c_2 = (N, B)$ correspondant à la coloration de $F_2$ et $F_4$, et $c_3 = (B, N)$ correspondant à celle de $F_3$ et donc $C = \{(B, G), (N, B), (B, N)\}$. Il en résulte que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puisque par exemple $(B, G)$ et $(B, G)$ n'étant pas compatible $a_{11} = 0$ et $(N, B)$ et $(B, N)$ sont compatibles donc $a_{23} = 1$.

Dans la suite de cette section, on notera $u_n(C)$ le nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n$ utilisant les colorations de $C$.

Le but de la fin de cette section est de déterminer une expression de $u_n(C)$ pour $n \geq 2$ utilisant la matrice $A_C$.

**Un exemple** Dans cet exemple, $c_1 = (B, G)$, $c_2 = (G, N)$ et $c_3 = (B, N)$. Ainsi, on a $C = \{(B, G), (G, N), (B, N)\}$.

**Q30.** Montrer que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**Q31.** Déterminer $A_C^2$ et en déduire $A_C^n$ pour $n \geq 2$. On pensera à distinguer le résultat suivant la parité de $n$.

**Q32.** Déterminer $u_2(C)$ en représentant les figures $\mathcal{F}_2$ correctement colorées correspondantes et déterminer aussi $u_3(C)$.

**Q33.** Vérifier que $u_2(C) = \operatorname{tr}\left(A_C^2\right)$ et que $u_3(C) = \operatorname{tr}\left(A_C^3\right)$.

**Cas général** On revient au cas général et on se donne :

- une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ avec $n \geq 2$ ;
- un ensemble $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ de colorations correctes de $F$ ;
- la matrice de compatibilité $A = A_C$ associée à $C$.

**Q34.** Soient $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ des colorations choisies dans $C$ où pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $i_j \in [\![1; p]\!]$.
Montrer qu'en affectant la coloration $c_{i_j}$ à $F_j$ pour $j \in [\![1; n]\!]$, on obtient une bonne coloration de $\mathcal{F}_n$ si, et seulement si :

$$a_{i_1, i_2} \times a_{i_2, i_3} \times \ldots \times a_{i_{n-1}, i_n} \times a_{i_n, i_1} = 1$$

**Q35.** Pour la suite, on note $a_{ij}^{(n)}$ le coefficient situé à la $i^{\text{e}}$ ligne et à la $j^{\text{e}}$ colonne de la matrice $A_C^n$.

Soit $i \in [\![1;p]\!]$. Montrer que le coefficient $a_{ii}^{(2)}$ de la matrice $A_C^2$ est égal au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ où la figure $F_1$ est colorée avec l'élément $c_i$ de $C$.

**Q36.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On admettra que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, le coefficient $a_{ii}^{(n)}$ de la matrice $A_C^n$ est égal au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ en commençant par colorier $F_1$ avec la couleur $c_i$ de $C$.

Expliquer comment calculer $u_n(C)$ à partir de $A_C^n$.

**Q37.** Soit $n \geq 2$. Quelle est la probabilité pour qu'une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ choisir au hasard et telle que les colorations de chaque $F_i$ où $1 \leq i \leq n$ soient prises dans $C = \{(B, G), (G, N), (N, B)\}$ ait une coloration correcte ?

**Q38.** Même question, les colorations de chaque $F_i$ où $1 \leq i \leq n$ étant prises cette fois dans l'ensemble $C$ où :

$$C = \{(B, G), (G, B), (B, N), (N, B)\}$$