À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Variables aléatoires à densité

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire G définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(2)}\dfrac{1}{1+t} & \text{si} \quad t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Q1. Montrer que f est une densité de probabilité.
Dans toute la suite de l'exercice, on désignera alors par X une variable aléatoire de densité f et on note F la fonction de répartition.

Éléments de correction

Caractère continu de f : la fonction $x \longmapsto 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$, et la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(2)}\dfrac{1}{1+t}$ est continue sur $[0;1]$ puisque $t \longmapsto 1+t$ est continue et ne s'annule pas sur $[0;1]$. Par conséquent la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement aux points 0 et 1.

Caractère positif de f : il est immédiat que f est positive sur les deux intervalles $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. De même pour tout $t \in [0;1]$, on a clairement que $1+t > 0$ et donc que $\dfrac{1}{\ln(2)}\dfrac{1}{1+t}$, et ainsi que $f(t) \geq 0$.
Par suite, f est positive sur $\mathbb{R}$.

Convergence et valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$: compte-tenu de l'expression de f, il s'agit d'établir la convergence et de déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(2)}\dfrac{1}{1+t}$ étant continue sur $[0;1]$, cette dernière est une intégrale définie, et donc convergente.

Par ailleurs, on a directement que :
$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &\underset{\forall t\in[0;1],1+t>0}{=} \left[\frac{1}{\ln(2)}\ln(1+t)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+1) - \frac{1}{\ln(2)}\ln(1+0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi, il vient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Q2. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$.

Éléments de correction

Par définition, X admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ce qui compte-tenu de l'expression de f, revient à établir la convergence et à calculer la valeur de $\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est continue sur $[0;1]$, cette dernière est donc une intégrale définie, donc convergente, et par suite X admet une espérance.

Par ailleurs, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)}\frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{1+t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&\underset{\forall t\in[0;1],\,1+t>0}{=} \frac{1}{\ln(2)}\left[t-\ln(1+t)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left[(1-\ln(1+1))-(0-\ln(1+0))\right] \\
&= \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, X admet une esp :'erance et on a $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-\ln(2)}{\ln(2)}$.

Q3. Montrer que X admet une variance, puis en remarquant que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 = t(t+1)-t$, la calculer.

Éléments de correction

Par définition, X admet une espérance si X^2 admet une espérance, ce qui d'après le théorème du transfert est le cas si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ce qui compte-tenu de l'expression de f, revient à établir la convergence et à calculer la valeur de $\int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. Comme la fonction $t \longmapsto t^2 f(t)$ est continue sur $[0;1]$, cette dernière est donc une intégrale définie, donc convergente, et par suite X^2 admet une espérance, et finalement X admet une variance.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{\ln(2)}\frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{t(1+t)-t}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \left(t-\frac{t}{1+t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t - \underbrace{\frac{1}{\ln(2)}\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,\mathrm{d}t}_{=\mathbb{E}(X)} \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)} \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left(\frac{1^2}{2}-0\right) - \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)} \\
&= 1-\frac{1}{2\ln(2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathbb{E}(X)^2 = 1-\dfrac{1}{2\ln(2)}$, et d'après la formule de Huygens, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X)^2 - (\mathbb{E}(X))^2 \\
&= 1-\frac{1}{2\ln(2)} - \left(\frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}\right)^2 \\
&= 1-\frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}\left(1-2\ln(2)+(\ln(2))^2\right) \\
&= 1-\frac{1}{2\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2} + \frac{2}{\ln(2)} - 1 \\
&= \frac{3}{2\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2} \\
&= \frac{1}{(\ln(2))^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln(2)}\right)
\end{aligned}$$

Q4. Déterminer l'expression de $F(x)$ pour tout x réel.

Éléments de correction

Par définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mathbb{P}([X \leq x])$

et puisque X est une variable aléatoire à densité : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$

Compte-tenu de l'expression de f, il vient donc que :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \begin{cases} \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} & \text{si } x < 0 \\ \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \underbrace{\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{=1} + \underbrace{\displaystyle\int_{1}^{x} \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} & \text{si } 1 < x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left[\dfrac{1}{\ln(2)}\ln(1+t)\right]_0^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}
\end{aligned}
$$

Q5. Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ d'inconnue le réel x, admet une unique solution notée x_0 que l'on déterminera.

Éléments de correction

La fonction F étant une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, cette dernière est une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}$, constante sur les deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$.
Par ailleurs, F est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf en éventuellement en 0 et 1, et on a :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [0;1]\,,\ F'(x) &= f(x) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\ln(2)}\frac{1}{1+x}}_{>0} \\
&> 0
\end{aligned}
$$

et par conséquent F est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$.
On en déduit ainsi le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $F'(x)$		0	0	$+$	0	0	
Variations de F	0	$\nearrow$ (constante)	0	$\nearrow$	1	(constante)	1

Compte-tenu des variations de F et des valeurs prises par F sur les deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$, l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ ne peut avoir de solution sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]1; +\infty[$.
Par ailleurs, on a :

- La fonction F est continue sur $[0;1]$
- La fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$

- $\frac{1}{2}$ appartient à 'intervalle de valeurs d'extrémités $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$

donc d'après le théorème des valeurs intérmédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$, notée x_0.

Par ailleurs, on a donc sur l'intervalle $[0;1]$:

$$\begin{aligned} \left(F(x) = \frac{1}{2}\right) &\Leftrightarrow \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} = \frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln(2)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\ln(1+x) = \ln\left(\sqrt{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(1+x = \sqrt{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x = \sqrt{2}-1\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ est le réel $x_0 = \sqrt{2} - 1 \in [0;1]$.

Q6. Soit $x \in [0;2]$. Établir l'équivalence : $\quad (f(t)f(x-t) \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\max(0, x-1) \leq t \leq \min(1,x))$.

Éléments de correction

Raisonnons par double implication :

Supposons que $\max(0, x-1) \leq t \leq \min(1,x)$ **:** Puisque $t \leq \min(1,x)$, il vient que $t \leq 1$

Puisque $\max(0, x-1) \leq t$, il vient que $0 \leq t$.

Par suite, $t \in [0;1]$ et donc compte-tenu de l'expression de f, il vient que $f(t) \neq 0$.

On peut obtenir par ailleurs que :

$$\begin{aligned} (\max(0, x-1) \leq t \leq \min(1,x)) &\Leftrightarrow (-\min(1,x) \leq -t \leq -\max(0, x-1)) \\ &\Leftrightarrow (x - \min(1,x) \leq x - t \leq x - \max(0, x-1)) \\ &\Leftrightarrow (\max(x-1, 0) \leq x - t \leq \min(x,1)) \end{aligned}$$

et en reprenant les discussions précédentes, on a que $f(x-t) \neq 0$ puisque $x - t \in [0;1]$.

Par conséquent $f(t)f(x-t) \neq 0$.

Supposons que $f(t)f(x-t) \neq 0$ **:** on en déduit donc que $f(t) \neq 0$ et $f(x-t) \neq 0$.

Par conséquent, compte-tenu de l'expression de f, $t \in [0;1]$ et $x - t \in [0;1]$.

On a notamment que :

$$\begin{aligned} (0 \leq x - t \leq 1) &\Leftrightarrow (-x \leq -t \leq 1 - x) \\ &\Leftrightarrow (x - 1 \leq t \leq x) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $0 \leq t \leq 1$ et $x - 1 \leq t \leq x$, il vient que $\max(0, x-1) \leq t$ et $t \leq \min(1,x)$, ce qui amène à $\max(0, x-1) \leq t \leq \min(1,x)$

Q7. Soit $x \in [0;2]$. On note φ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+t)(1+x-t)} & \text{si} \quad \max(0, x-1) \leq t \leq \min(1,x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet l'existence d'un unique couple (A, B) de réels indépendants de t pour lequel on a :

$$\forall t \in [\max(0,x-1); \min(1,x)], \ \frac{1}{(1+t)(1+x-t)} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1+x-t}$$

Montrer que $A = B = \dfrac{1}{x+2}$.

Éléments de correction

On a directement que : $\forall t \in [\max(0,x-1);\min(1,x)]$, $$\frac{A}{1+t}+\frac{B}{1+x-t} = \frac{1}{(x+2)(1+t)}-\frac{1}{(x+2)(1+x-t)} = \frac{1+x-t-(1+t)}{(x+2)(1+t)(1+x-t)} = \frac{x+2}{(x+2)(1+t)(1+x-t)} = \frac{1}{(1+t)(1+x-t)}$$

Q8. Soit alors Y une variable aléatoire indépdendante de X, de même loi que X et de densité f.
On pose $Z = X+Y$, et on admet que Z est une variable aléatoire à densité.
On note h une densité de la variable aléatoire Z, et on admet que h est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose par ailleurs que Z admet un moment d'ordre 2. Justifier l'existence, puis calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Éléments de correction

Puisque Z admet un moment d'ordre 2, Z admet une variance, et par théorème puisque Z admet un moment d'ordre 2, Z admet un moment d'ordre 1 c'est à dire $\mathbb{E}(X)$ existe.
Par linéarité de l'espérance, on a : $$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+EY = \frac{1-\ln(2)}{\ln(2)}+\frac{1-\ln(2)}{\ln(2)} = \frac{2-2\ln(2)}{\ln(2)}$$
De plus, comme X et Y sont supposées indépendantes, on a : $$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = \frac{2}{(\ln(2))^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\ln(2)}\right)$$

Q9. Montrer que : $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln(2))^2(x+2)} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2(\ln(2)-\ln(x))}{(\ln(2))^2(x+2)} & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in [0;2]$: $(f(t)f(x-t) \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\max(0,x-1) \leq t \leq \min(1,x))$.
Ainsi, il vient : $$\forall x \in [0;2]\,,\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\max(0,x-1)}^{\min(1,x)} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_{x-1}^1 f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases} \underset{\substack{\textbf{Dans les deux cas} \\ \textbf{on a } t\in[0;1] \textbf{ et } x-t\in[0;1]}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)(1+x-t)}\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\displaystyle\int_{x-1}^1 \frac{1}{(1+t)(1+x-t)}\,\mathrm{d}t & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
D'après ce qui précède, une primitive sur l'intervalle $[\max(0,x-1);\min(1,x)]$ pour $x \in [0;2]$ de la fonction $t \longmapsto$

$\dfrac{1}{(1+t)(1+x-t)}$ est $t \longmapsto \dfrac{1}{x+2}\ln(1+t) - \dfrac{1}{x+2}\ln(1+x-t)$. Ainsi, on obtient que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0;2]\,,\ h(x) &= \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\left[\dfrac{1}{x+2}\ln(1+t) - \dfrac{1}{x+2}\ln(1+x-t)\right]_0^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\left[\dfrac{1}{x+2}\ln(1+t) - \dfrac{1}{x+2}\ln(1+x-t)\right]_{x-1}^1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\dfrac{1}{x+2}\left(\ln(1+x) - \ln(1+x-x) - \ln(1+0) + \ln(1+x-0)\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\dfrac{1}{x+2}\left(\ln(1+1) - \ln(1+x-1)\right) - \ln(1+x-1) + \ln(1-x-(x-1))) & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\dfrac{1}{x+2}\left(\ln(1+x) + \ln(1+x)\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{(\ln(2))^2}\dfrac{1}{x+2}\left(\ln(2) - \ln(x) - \ln(x) + \ln(2)\right) & \text{si } < x \leq 2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2\,(\ln(2) - \ln(x))}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a : $(0 \leq t \leq 1) \Leftrightarrow (-1 \leq -t \leq 0) \Leftrightarrow (x-1 \leq x-t \leq x)$ et $(0 \leq x-t \leq 1) \Leftrightarrow (-x \leq -t \leq 1-x) \Leftrightarrow (x-1 \leq t \leq x)$

Par suite :

Si $x < 0$ **:** si $t \in [0;1]$, on aura $x - t \leq x < 0$ et donc $\underbrace{f(t)}_{\neq 0}\underbrace{f(x-t)}_{=0} = 0$ par définition de f. Et si $t \notin [0;1]$, on aura de fait $\underbrace{f(t)}_{=0}f(x-t) = 0$.

Par conséquent, $h(x) = 0$.

Si $x > 2$ **:** si $x - t \in [0;1]$, on aura $1 < x - 1 \leq t$ et donc $\underbrace{f(t)}_{=0}\underbrace{f(x-t)}_{\neq 0} = 0$ par définition de f. Et si $x - t \notin [0;1]$, on aura de fait $f(t)\underbrace{f(x-t)}_{=0} = 0$.

Par conséquent, $h(x) = 0$.

Finalement, il vient bien que : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(1+x)}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{2\,(\ln(2) - \ln(x))}{(\ln(2))^2\,(x+2)} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Problème n° 2 | Suite définie par un produit

Dans tout l'exercice, on considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels non tous nuls, et on associe à cette suite $(u_n)_{n\geq 1}$, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k$

On adopte la terminologie suivante :

- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie p non nulle, on dit que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente ;
- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, on dit que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente ;
- si la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ n'est ni convergente ni bien convergente, on dit qu'elle est divergente.

Partie A | Illustration de la construction d'une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ et des définitions

Q10. Dans chacun des cas suivants, exprimer p_n en fonction de n et en déduire la nature (convergence, bien convergente ou divergente) de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$:

Cas n° 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$

Cas n° 2 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

Cas n° 3 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Éléments de correction

Cas n° 1 : On a dans ce cas :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}\\ &= \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n+1}{n}\\ &= n+1\end{aligned}$$

Il est immédiat que $n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que $(p_n)_{n\geq 1}$ est divergente.

Cas n° 2 : On a dans ce cas :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Il est immédiat que $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $(p_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

Cas n° 3 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

On a dans ce cas :
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}\\ &= \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\times\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}\right)\times\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n+2}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\times\frac{n+2}{2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{n+1}{n+2}\end{aligned}$$

Il est clair que $\dfrac{n+1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et par suite $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ ce qui signifie que $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente.

Partie B | Convergence d'une première suite $(p_n)_{n\geq 1}$

On suppose dans cette partie, que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\end{cases}$

Q11. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{2n}$

$$\begin{aligned}
p_{2n} &= \prod_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^{2k}}{2k}\right)\right)\times\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right)\times\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k}\right)\times\left(\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k}{2k+1}\right)\\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k}\times\frac{2k}{2k+1}\right)\times\frac{2n+1}{2n}\\
&= 1\times\frac{2n+1}{2n}\\
&= 1+\frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

Q12. Déterminer ensuite les limites des suites $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Qu'en conclure alors pour $(p_n)_{n\geq 1}$?

Éléments de correction

De la question précédente, on en déduit que $p_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_{2n+1}$

$$\begin{aligned}
p_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{2n+1} u_k\\
&= \left(\prod_{k=1}^{2n} u_k\right)\times u_{2n+1}\\
&= p_{2n}\times u_{2n+1}\\
&= p_{2n}\left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)\\
&= \underbrace{p_{2n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}
\end{aligned}$$

et par suite $p_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Par conséquent, les deux suites $(p_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers la même limite, on en déduit par théorème que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers cette même limite, c'est à dire $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui assure que $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente.

Partie C | Convergence d'une deuxième suite $(p_n)_{n\geq 1}$

On suppose dans cette partie, que a est un réel donné tel que $0 < a < 1$ et que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + a^{(2^n)}$$

Q13. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1-a^2\right)p_n = 1 - a^{\left(2^{n+1}\right)}$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $\left(1-a^2\right)p_n = 1 - a^{(2^n)}$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Initialisation : au rang 1, on a :

$$\begin{aligned}(1-a^2)\,p_1 &= (1-a^2)\prod_{k=1}^{1}\left(1+a^{(2^k)}\right)\\ &= (1-a^2)\left(1+a^{(2^1)}\right)\\ &= (1-a^2)\left(1+a^2\right)\\ &= 1-\left(a^2\right)^2\\ &= 1-a^2\times a^2\\ &= 1-a^4\\ &= 1-a^{(2^2)}\\ &= 1-a^{(2^{1+1})}\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Par définition de p_{n+1}, on a :

$$\begin{aligned}(1-a^2)\,p_{n+1} &= (1-a^2)\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{(2^k)}\right)\\ &= (1-a^2)\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+a^{(2^k)}\right)\right)\times\left(1+a^{2^{n+1}}\right)\\ &\underset{\text{H.R.}}{=} \left(1-a^{(2^{n+1})}\right)\left(1+a^{(2^{n+1})}\right)\\ &= 1-\left(a^{(2^{n+1})}\right)^2\\ &= 1-a^{(2^{n+1})}\times a^{(2^{n+1})}\\ &= 1-a^{(2\times 2^{n+1})}\\ &= 1-a^{(2^{n+2})}\end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout enteir $n\geq 1$.

Q14. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a^{(2^n)}\leq a^n$.

Éléments de correction

On pourrait montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n\leq 2^n$.
Soit alors $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $a\in\,]0;1[$, on a $\ln(a)<0$ et par suite : $\ln(a)n\geq 2^n\ln(a)$.
Par croissance de la fonction exponentielle, il vient alors que : $\mathrm{e}^{\,n\ln(a)}\geq \mathrm{e}^{\,2^n\ln(a)}$
ce qui donne bien que : $a^{(2^n)}\leq a^n$.

Q15. En déduire la convergence de la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ en fonction de a et en préciser la nature (convergente, bien convergente, divergente).

Éléments de correction

De ce qui précède puisque $a\neq 1$, on en déduit que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=\dfrac{1-a^{(2^{n+1})}}{1-a^2}$.

De plus, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq a^{(2^{n+1})}\leq a^{n+1}$.

Puisque $|a|<1$, il vient que $a^{n+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et donc par le théorème d'encadrement on en déduit que $a^{(2^{n+1})}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$,
ce qui implique que $p_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{1-a^2}\neq 0$.

Par conséquent, la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente et sa limite est $\dfrac{1}{1-a^2}$.

Partie D | Convergence dans un cadre plus général

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On suppose dans cette partie que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=1+a_n$$

On définit la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \dfrac{a_n}{p_n}$.

Q16. Exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, T_n en fonction de p_n et p_{n-1}.

Éléments de correction

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ T_n &= \frac{a_n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)} \\
&= \frac{a_n}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1+a_k)\right) \times (1+a_n)} \\
&= \frac{a_n}{p_{n-1}(1+a_n)} \\
&= \frac{a_n+1-1}{p_{n-1}(1+a_n)} \\
&= \frac{a_n+1}{p_{n-1}(1+a_n)} - \frac{1}{p_{n-1}(1+a_n)} \\
&= \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}
\end{aligned}$$

Q17. On suppose ici que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est bien convergente de limite $p > 0$.

Montrer que la série de terme général T_n est convergente et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \dfrac{1}{p}$.

Éléments de correction

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} T_n &= T_1 + \sum_{n=2}^{N} T_n \\
&= T_1 + \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}\right) \\
&= T_1 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_N} \\
&= \frac{a_1}{p_1} + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_N} \\
&= \frac{1}{p_1}(a_1+1) - \frac{1}{p_N} \\
&= \frac{p_1}{p_1} - \frac{1}{p_N} \\
&= 1 - \frac{1}{p_N}
\end{aligned}$$

Puisque $(p_n)_{n\geq 1}$ converge vers $p > 0$, on en déduit par passage à la limite que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \dfrac{1}{p}$, ce qui par définition, assure la convergence de la série de terme général T_n, et donne que la somme de cette série est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = 1 - \dfrac{1}{p}$.

Q18. On suppose ici que la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est divergente au sens de la définition donnée plus haut.

Montrer que la série de terme général T_n est convergente et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$.

Éléments de correction

Sur le même principe qu'à la question précédente, on a : $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{n=1}^{N} T_n = 1 - \dfrac{1}{p_N}$.

Puisque la suite $(p_n)_{n\geq 1}$ est divergente au sens de la définition donnée plus haut, on a $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc il vient que $\dfrac{1}{p_N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit par passage à la limite que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$, ce qui par définition, assure la convergence de la série de terme général T_n, et donne que la somme de cette série est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} T_n = 1$.

Problème n° 3 | Coloration d'une figure

Dans ce problème, on désigne par n et p des entiers naturels tels que $n \geq 1$ et $p \geq 2$.
Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels.
Pour $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera a_{ij} le coefficient situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice A.

On rappelle que la trace de A, notée $\operatorname{tr}(A)$ est définie par : $\operatorname{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_{ii}$.

Si λ_1, λ_2,…,λ_p sont des réels, on note $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

Dans la première partie, on exprime la trace de la puisssane n^{e} d'une matrice diagonalisable, en fonction des valeurs propres de cette matrice.
Dans la seconde partie, on étudie la coloration d'une figure.

Partie I | Expression de la trace de A^n si A est diagonalisable

Étude d'un exemple

Dans cette sous-partie, A désignera la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q19. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2.

Éléments de correction

Par théorème, on a : $$(\lambda \in \operatorname{sp}(A)) \Leftrightarrow (A - \lambda \mathrm{I}_3 \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (\operatorname{rg}(A - \lambda \mathrm{I}_3) \neq 3)$$

Il est immédiat que $A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc que $\operatorname{rg}(A + \mathrm{I}_3) = 1 \neq 3$ puisque les trois colonnes sont proportionnelles entre elles. Donc $-1 \in \operatorname{sp}(A)$.

Par ailleurs, on remarque que : $$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui assure par définition que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2, et par conséquent $2 \in \operatorname{sp}(A)$.

Q20. Montrer que le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constitue une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2, et que les vecteurs $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituent une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre de -1.

Éléments de correction

On a déjà établi à la question précdente que $AX_1 = 2X_1$ et donc que $X_1 \in E_2(A)$ et par conséquent que $\mathrm{Vect}\ (X_1) \subset E_2(A)$ et par suite que $1 \leq \dim\left(E_2(A)\right) \leq 3$

Un calcul direct donne que :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et que :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ce qui signifie que $AX_2 = -X_2$, $AX_3 = -X_3$, et donc que $X_2 \in E_{-1}(A)$ et $X_3 \in E_{-1}(A)$. Par suite, on en déduit que $\mathrm{Vect}\ (X_2, X_3) \subset E_{-1}(A)$ et donc que $Z \leq \dim\left(E_{-1}(A)\right) \leq 3$

Par ailleurs, $E_2(A) + E_{-1}(A)$ est un sous-espace de dimension au plus 3 puisque $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ avec $E_2(A)$ et $E_{-1}(A)$ en somme directe donc est de dimension $\dim\left(E_2(A)\right) + \dim\left(E_{-1}(A)\right)$.

Des inégalités précdentes, on en déduit que $\dim\left(E_2(A)\right) = 1$ et $\dim\left(E_{-1}(A)\right) = 2$, ce qui assure le caractère base des deux familles de vecteurs propres considérées.

Q21. En déduire que la matrice A est diagonalisable. Pour toute la suite de cette sous-partie, on note alors $D = \mathrm{diag}\left(-1, -1, 2\right)$.

Éléments de correction

De ce qui précède, on a donc $\dim\left(E_2(A)\right) + \dim\left(E_{-1}(A)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right)$, donc par théorème, la matrice A est diagonalisable.

Q22. On considère alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice définie par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que l'on a : $P^3 - 2P^2 + 3P - 3\mathrm{I}_3 = (0)$.
Déterminer la matrice P^{-1} inverse de la matrice P.

Éléments de correction

De la relation $P^3 - 2P^2 + 3P - 3\mathrm{I}_3 = (0)$, il vient que : $P^3 - 2P^2 + 3P = 3\mathrm{I}_3$.
Par suite, on a : $P\left(P^2 - 2P + 3\mathrm{I}_3\right) = 3\mathrm{I}_3$

et par conséquent : $P \times \dfrac{1}{3}\left(P^2 - 2P + 3\mathrm{I}_3\right) = \mathrm{I}_3$

Il existe donc une matrice $B = \dfrac{1}{3}\left(P^2 - 2P + 3\mathrm{I}_3\right)$ telle que $P \times B = \mathrm{I}_3$, donc par théorème, la matrice P est inversible d'inverse la matrice B, c'est à dire ici que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\left(P^2 - 2P + 3\mathrm{I}_3\right)$.

Un calcul direct donne que : $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et par suite, il vient que :

$$
\begin{aligned}
P^{-1} &= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Q23. Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on sait que $A^1 := A$.
Les colonnes de la matrice P étant formée des 3 vecteurs propres de $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ associés à 3 valeurs propres disctinctes, c'est donc la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ diagonalisante pour A, la matrice A étant alors semblable à la matrice D, ét on a ainsi $PDP^{-1} = A$ d'après les formules de changement de base.
On a donc $A^1 = PD^1P^{-1}$ ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
On sait que : $A^{n+1} = A^nA$.
Par hypothèse de récurrence et puisque l'on a $\mathcal{P}(1)$:

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{=\mathrm{I}_3} DP^{-1} \\
&= PD^nDP^{-1} \\
&= PD^{n+1}P^{-1}
\end{aligned}
$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Q24. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Éléments de correction

Une récurrence immédiate permettrait d'établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \operatorname{diag}\left(2^n, (-1)^n, (-1^n)\right)$.

On en déduit alors que :

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ A^n &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ -2^n & 0 & (-1)^n \\ 0 & (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & -2^{n+1} + 2(-1)^n & 2^n + (-1)^{n+1} \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n & -2^n + (-1)^n \\ 0 & 0 & 3(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Q25. Vérifier que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A^n) &= \operatorname{tr}(D^n) \\
&= 2(-1)^n + 2^n
\end{aligned}
$$

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a que :

$$
\begin{aligned}
\forall n \geq 1,\ \operatorname{tr}(A^n) &= \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n + 2^{n+1} + (-1)^n + 3(-1)^n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^n(1+2) + 6(-1)^n\right) \\
&= 2^n + 2\left(-1\right))^n
\end{aligned}
$$

et il est immédiat que $\operatorname{tr}(D^n) = 2^n + 2(-1)^n$ d'où le résultat.

Cas général

Dans cette section, A désigne une matrice $p \times p$ supposée diagonalisable.

Il existe donc une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ avec $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_p$ et une matrice $p \times p$ inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Q26. Montrer que si U et V sont deux matrices $p \times p$, alors $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$.

Éléments de correction

On note au préalable $U = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $V = (v_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.
En notant $M = UV = (m_{ij})_{1 \leq i,j, \leq n}$ et $N = VU = (n_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, on sait que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;n]\!], \; m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} b_{kj} \text{ et } n_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} v_{i\ell} u_{\ell j}$$

Par définition, on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M) &= \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_{ik} v_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} v_{ki} u_{ik} \\
&\underset{\substack{\text{Permutation des sommes car} \\ \text{indices de sommation indépendants}}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_{ki} u_{ik} \\
&\underset{\substack{\text{Renommage des} \\ \text{indices}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} v_{ik} u_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_{ii} \\
&= \operatorname{tr}(N)
\end{aligned}$$

et ainsi, il vient que $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$.

Q27. Justifier que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}(A^n) &= \operatorname{tr}(D^n) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^n
\end{aligned}$$

Éléments de correction

On sait que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = PD^nP^{-1}$

Donc d'après ce qui précède, on a :

$$\begin{aligned}
\forall n\, in\mathbb{N}^*, \operatorname{tr}(A^n) &= \operatorname{tr}\left(PD^nP^{-1}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(PP^{-1}D^n\right) \\
&= \operatorname{tr}(\mathrm{I}_3 D^n) \\
&= \operatorname{tr}(D^n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n
\end{aligned}$$

puisque l'on pourrait établir par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, D^n = \operatorname{diag}\left(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_p^n\right)$.

Partie II | Une figure colorée

Dans toute la suite de ce problème, on étudie les colorations d'une figure notée $\mathcal{F}_n$ pour $n \geq 1$.

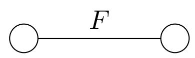
La figure $\mathcal{F}_1$ ou plus simplement F est constituée de deux points ou sommets reliés entre eux.

Plus généralement, la figure $\mathcal{F}_n$ est constituée de n copies de la figure F, notées $F_1, F_2, \ldots, F_n$ reliées entre elles et disposées de sorte qu'elles forment deux polygones à n sommets.

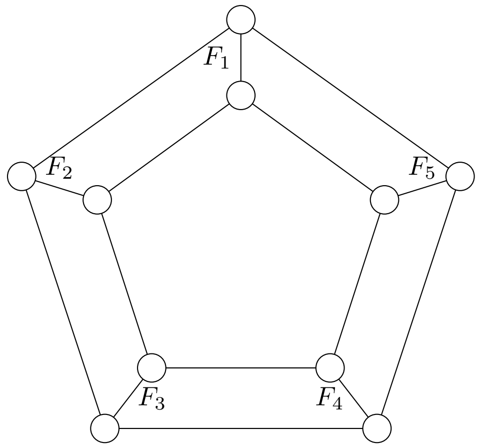
On notera abusivement $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$.

Une illustration représentant les figures F et $\mathcal{F}_5 = (F_1, \ldots, F_5)$ est donnée ci-après.

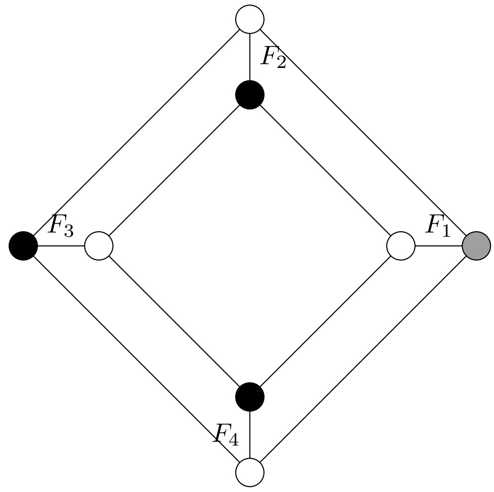
La figure $\mathcal{F}_1 = F$



La figure $\mathcal{F}_5$



Une coloration correcte de la figure $\mathcal{F}_4$



On dispose par ailleurs de trois couleurs, à savoir : blanc (notée B), gris (notée G) et noir notée (N).
Chaque sommet de $\mathcal{F}_n$ est coloré par une couleur choisie parmi $\{B, G, N\}$.
La coloration de la figure $\mathcal{F}_n$ sera dite correcte si deux sommets reliés dans la figure sont de couleurs différentes.
Une illustration d'une coloration correcte de $\mathcal{F}_4 = (F_1, \ldots, F_4)$ est donnée plus haut.
Par exemple, les colorations correctes de F sont : $(B, G), (B, N), (G, N), (G, B), (N, B), (N, G)$.
On notera que les colorations (B, G) et (G, B) par exemple, sont différentes, ceci signifie que dans une coloration de la figure $\mathcal{F}_n$, les sommets sont supposés distingués les uns des autres.
Dans la suite de ce problème, on se donne une partie non vide $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ avec $2 \leq p \leq 6$, de l'ensemble des colorations correctes de F qui est $\{(B, G), (B, N), (G, N), (G, B), (N, B), (N, G)\}$.
Pour obtenir une coloration correcte de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$, on commence par choisir des colorations correctes de chacune des copies F_i avec $1 \leq i \leq n$ dans l'ensemble C.
On dit que deux éléments $c = (K_1, K_2)$ et $c' = (K'_1, K'_2)$ de C sont compatibles si $K_1 \neq K'_1$ et $K_2 \neq K'_2$.
Par exemple, $c = (B, N)$ et $c' = (N, G)$ sont compatibles car $B \neq N$ et $N \neq G$; par contre, $c = (B, N)$ et $c' = (B, G)$ ne sont pas compatibles car $B = B$ et $N \neq G$.
Il en résulte que la coloration de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ sera correcte si, et seulement si, les colorations F_1 et F_2, F_2 et F_3, …, F_{n-1} et F_n, et aussi F_n et F_1 sont compatibles.

Probabilités

Dans cette question, on suppose $n \geq 2$ et on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que Ω est l'ensemble des figures $\mathcal{F}_n$ colorées (correctement ou non) avec $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$, et $\mathbb{P}$ est telle que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont colorées par un élément de C avec équiprobabilité et indépendance.

Q28. Pour une coloration c_i de F_1 avec $1 \leq i \leq p$, l'entier i désigne l'indice de cette coloration.
Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X donnant l'indice de la coloration de F_1 pour la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$?
Quelles sont l'espérance et la variance de X ?

Éléments de correction

Le support $X(\Omega)$ de X est donc $[\![1; p]\!]$ puisque $c_i \in C = \{c_1, \ldots, c_p\}$.
Pour colorer la figure F_1, il suffit de choisir une coloration c_i parmi les p colorations $c_1, \ldots, c_p$ formant l'ensemble $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$., le choix de cette coloration parmi les colorations possibles pouvant être supposé équiprobable.
Par suite, X suit la loi uniforme sur l'ensemble des entiers $[\![1; p]\!]$, ce qui donne que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.

Q29. Montrer que la variable aléatoire Y donnant le nombre de F_i avec $1 \leq i \leq n$ de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ ayant pour coloration l'élément c_1 de C suit une loi usuelle que l'on déterminera.
Quelles sont l'espérance et la variance de Y ?

Éléments de correction

Épreuve de Bernoulli : on regarde si la figure F a pour coloration c_1, la probabilité de l'événement succès étant d'après la question précénte égal à $\frac{1}{p}$.

Répétition de l'épreuve de Bernoulli : on regarde les unes après les autres les n figures $F_1, \ldots, F_n$ constituant $\mathcal{F}_n$, et on compte le nombre de figures possédant la coloration c_1.
Par hypothèse les différentes colorations des figures $F_1, \ldots, F_n$ sont indépendants.

Ainsi, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{p}\right)$, et on en déduit que : $\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{p}$ et $\mathbb{V}(Y) = \frac{p-1}{np^2}$.

Matrice de compatibilité et nombre de colorations correctes

On introduit la matrice $p \times p$ de compatibilité associée à C, notée A_C ou tout simplement A, dont les coefficients sont tels que :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_i \text{ et } c_j \text{ sont compatibles} \\ 0 & \text{si} \quad c_i \text{ et } c_j \text{ ne sont pas compatibles} \end{cases}$$

Par exemple, dans le cas de la figure précédente illustrant une coloration correcte de $\mathcal{F}_4$, on a donc $n = 4$ et on prend $p = 3$ avec $c_1 = (B,G)$ correspondant à la coloration de F_1, $c_2 = (N,B)$ correspondant à la coloration de F_2 et F_4, et $c_3 = (B,N)$ correspondant à celle de F_3 et donc $C = \{(B,G),(N,B),(B,N)\}$. Il en résulte que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puisque par exemple (B,G) et (B,G) n'étant pas compatible $a_{11} = 0$ et (N,B) et (B,N) sont compatibles donc $a_{23} = 1$.

Dans la suite de cette section, on notera $u_n(C)$ le nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n$ utilisant les colorations de C.

Le but de la fin de cette section est de déterminer une expression de $u_n(C)$ pour $n \geq 2$ utilisant la matrice A_C.

Un exemple

Dans cet exemple, $c_1 = (B,G)$, $c_2 = (G,N)$ et $c_3 = (B,N)$. Ainsi, on a $C = \{(B,G),(G,N),(B,N)\}$.

Q30. Montrer que $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

Par définition de la matrice de compatibilité :

- $a_{11} = 0$ car c_1 et c_1 ne sont pas compatibles
- $a_{12} = 1$ car c_1 et c_2 sont compatibles
- $a_{13} = 0$ car c_1 et c_3 ne sont pas compatibles
- $a_{21} = 1$ car c_2 et c_1 sont compatibles
- $a_{22} = 0$ car c_2 et c_2 ne sont pas compatibles
- $a_{23} = 0$ car c_2 et c_3 ne sont pas compatibles
- $a_{33} = 0$ car c_3 et c_1 ne sont pas compatibles
- $a_{33} = 0$ car c_3 et c_2 ne sont pas compatibles
- $a_{33} = 0$ car c_3 et c_3 ne sont pas compatibles

et par suite, on a bien que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q31. Déterminer A_C^2 et en déduire A_C^n pour $n \geq 2$. On pensera à distinguer le résultat suivant la parité de n.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que $A_C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par suite, on peut proposer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ A_C^n = \begin{cases} A_C & \text{si } n \text{ est impair} \\ A_C^2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Q32. Déterminer $u_2(C)$ en représentant les figures $\mathcal{F}_2$ correctement colorées correspondantes et déterminer aussi $u_3(C)$.

Éléments de correction

Comptage des colorations correctes de $\mathcal{F}_2$: on raisonne par disjonction des cas :

- **si $c_1 = (B, G)$,** alors $c_2 = (G, N)$ car $c_2 = (B, N)$ n'amènera pas une coloration correcte de $\mathcal{F}_2$.
- **si $c_1 = (G, N)$,** alors $c_2 = (B, G)$ car $c_2 = (B, N)$ n'amènera pas une coloration correcte de $\mathcal{F}_2$.
- **si $c_1 = (B, N)$,** alors ni $c_2 = (B, G)$ ni $c_2 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_2$.

On en déduit donc que $u_2(C) = 2$.

Comptage des colorations correctes de $\mathcal{F}_3$: on raisonne par disjonction des cas :

- **si $c_1 = (B, G)$,** on a les deux sous-cas suivants :
  - **si $c_2 = (G, N)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;
  - **si $c_2 = (B, N)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;
- **si $c_1 = (G, N)$,** on a les deux sous-cas suivants :
  - **si $c_2 = (B, G)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;
  - **si $c_2 = (B, N)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;
- **si $c_1 = (B, N)$,** on a les deux sous-cas suivants :
  - **si $c_2 = (B, G)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;
  - **si $c_2 = (G, N)$,** alors ni $c_3 = (B, G)$, ni $c_3 = (B, N)$ et ni $c_3 = (G, N)$ n'amèneront une coloration correcte de $\mathcal{F}_3$;

On en déduit donc que $u_3(C) = 0$.

Q33. Vérifier que $u_2(C) = \mathrm{tr}\left(A_C^2\right)$ et que $u_3(C) = \mathrm{tr}\left(A_C^3\right)$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède, on a que $\mathrm{tr}\left(A_C^2\right) = 2$ et $\mathrm{tr}\left(A_C^3\right) = 0$.
Or on a vu précédement que $u_2(C) = 2$ et $u_3(C) = 0$, d'où le résultat.

Cas général

On revient au cas général et on se donne :

- une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ avec $n \geq 2$;
- un ensemble $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ de colorations correctes de F ;
- la matrice de compatibilité $A = A_C$ associée à C.

Q34. Soient $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ des colorations choisies dans C où pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, $i_j \in [\![1; p]\!]$.
Montrer qu'en affectant la coloration c_{i_j} à F_j pour $j \in [\![1; n]\!]$, on obtient une bonne coloration de $\mathcal{F}_n$ si, et seulement si :

$$a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times \ldots \times a_{i_{n-1},i_n} \times a_{i_n,i_1} = 1$$

Éléments de correction

Par hypothèse, la coloration de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ sera correcte si, et seulement si, les colorations F_1 et F_2, F_2 et F_3, ..., F_{n-1} et F_n, et aussi F_n et F_1 sont compatibles.
Or la compatibilité de la coloration des deux figures F_j et F_{j+1} pour $1 \leq j \leq n-1$ est acquise si, et seulement si, les deux colorations c_{i_j} et $c_{i_{j+1}}$ sont compatibles, ce qui correspond au fait que le coefficient correspondant dans la matrice de compatibilité qui est donc $a_{i_j,i_{j+1}}$ est égal à 1. De même pour les figures F_{i_n} et F_{i_1}.
Ainsi, si la coloration de la figure est correcte, le produit $a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times \ldots \times a_{i_{n-1},i_n} \times a_{i_n,i_1}$ est non nul, et de fait, égal à 1.
Réciproquement, si le produit $a_{i_1,i_2} \times a_{i_2,i_3} \times \ldots \times a_{i_{n-1},i_n} \times a_{i_n,i_1} = 1$, chaque facteur de ce dernier est non nul, et traduit couple de figures par couple de figures, que la coloration est correcte.

Q35. Pour la suite, on note $a_{ij}^{(n)}$ le coefficient situé à la i^e ligne et à la j^e colonne de la matrice A_C^n.
Soit $i \in [\![1;p]\!]$. Montrer que le coefficient $a_{ii}^{(2)}$ de la matrice A_C^2 est égal au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ où la figure F_1 est colorée avec l'élément c_i de C.

Éléments de correction

Pour obtenir une coloration correcte de la figure constituée des figures F_1 et F_2, à partir de la coloration c_i choisie pour F_1, il suffit donc choisir une coloration pour F_2 qui soit compatible avec F_1, puisque la figure $\mathcal{F}_\in$ nétant constituée que deux deux figures, les deux colorations choisies vérifieront la relation précédente trivialement.
Le terme général de la matrice A_C^2 s'obtient par la formule donnant le produit de deux matrices, et ainsi on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;p]\!] \,,\; a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}a_{kj}$$

En particulier, les coefficients diagonaux de A_C^2 sont : $\quad \forall i \in [\![1;p]\!] \,,\; a_{ii}^{(2)} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}a_{ki}$

or pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, le produit $a_{ik}a_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_{ik} = a_{ki} = 1 \\ 0 & \text{si} \quad a_{ik} = 0 \text{ ou } a_{ki} = 0 \end{cases}$
Le produit $a_{ik}a_{ki}$ s'interprête comme étant le choix de deux colorations de F_1 et de F_2, qui conduiront à une figure $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ bien colorée dès lors que leur produit sera égal à 1 et une figure mal colorée dès lors que leur produit sera égal à 0.
Par suite, le coefficient $a_{11}^{(2)}$ donnera le nombre de colorations correctes de $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ lorsque l'on commence à colorer F_1 avec le premier élément de C, le coefficient $a_{22}^{(2)}$ donnera le nombre de colorations colorations correctes de $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ lorsque l'on commence à colorer F_1 avec le deuxième élément de C, et de faοn plus générale le coefficient $a_{ii}^{(2)}$ donnera le nombre de colorations colorations correctes de $\mathcal{F}_2 = (F_1, F_2)$ lorsque l'on commence à colorer F_1 avec le i^e élément de C.

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}^{\setminus} \{0,1\}$. On admettra que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, le coefficient $a_{ii}^{(n)}$ de la matrice A_C^n est égal au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ en commençant par colorier F_1 avec la couleur c_i de C.
Expliquer comment calculer $u_n(C)$ à partir de A_C^n.

Éléments de correction

Les coefficients diagonaux de A^n sont égaux au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n$ en commençant par la couleur c_i pour a_{ii}. Ainsi, la trace de la matrice A_C^n est égale au nombre de colorations correctes de la figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$.

Q37. Soit $n \geq 2$. Quelle est la probabilité pour qu'une figure $\mathcal{F}_n = (F_1, \ldots, F_n)$ choisir au hasard et telle que les colorations de chaque F_i où $1 \leq i \leq n$ soient prises dans $C = \{(B,G), (G,N), (N,B)\}$ ait une coloration correcte ?

Éléments de correction

Dáprès la question précédente, le nombre de colorations correctes $u_n(C)$ pour la figure $\mathcal{F}_n$ est tel que $u_n(C) = \mathrm{tr}\ (A_C^n)$.
Or ici, on a $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc d'après ce qui précède, on a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{tr}\ (A^n) = 2^n + 2(-1)^n$.

Le nombre de figures colorées $\mathcal{F}_n$ à l'aide du jeu de coloration C est ici 3^n puisque chaque figure F_i de la figure $\mathcal{F}_n$ peut être colorée à l'aide d'une des trois couleurs du jeu de couleur de C.
On en déduit alors par hypothèse d'équiprobabilité faite sur le choix des couleurs que la probabilité cherchée est $\dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3^n}$.

Q38. Même question, les colorations de chaque F_i où $1 \leq i \leq n$ étant prises cette fois dans l'ensemble C où :

$$C = \{(B,G), (G,B), (B,N), (N,B)\}$$

Éléments de correction

Dápres la question précédente, le nombre de colorations correctes $u_n(C)$ pour la figure $\mathcal{F}_n$ est tel que $u_n(C) = \mathrm{tr}\,(A_C^n)$.

Or ici, on a $A_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On remarque que :
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$
donc 2 est valeur propre de A avec $\dim(E_2(A)) \geq 1$.

De même :
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{pmatrix} \\ &= -2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$
donc -2 est valeur propre de A avec $\dim(E_{-2}(A)) \geq 1$.
Comme A possède deux colonnes identiques, $\mathrm{rg}\,(A) \leq 3$, donc A n'est pas inversible, et par suite 0 est valeur propre de A.

Or en remarquant que :
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= 0\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

ainsi que :
$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\ &= 0\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \end{aligned}$$
Ces deux matrices colonnes étant clairement non nulles et non colinéaires, on en déduit que $\dim(E_0(A)) \geq 2$.
Compte-tenu du fait que la somme des dimensions des sous-espaces propres est au plus égale à la dimension de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que $\dim(E_2(A)) = 1$, $\dim(E_{-2}(A)) = 1$ et $\dim(E_0(A)) = 2$, ce qui assure que le spectre de A est exactement $\mathrm{sp}(A) = \{-2, 0, 2\}$.
On en déduit alors que A est diagonalisable, et est semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}\,(-2, 0, 0, 2)$.
Donc d'après ce qui précède on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{tr}\,(A^n) = (-2)^n + 2^n$.
Ainsi, on en déduit que : $\forall n \geq 1$, $u_n(C) = 2^n + (-2)^n$.

Le nombre de figures colorées $\mathcal{F}_n$ à l'aide du jeu de coloration C est ici 4^n puisque chaque figure F_i de la figure $\mathcal{F}_n$ peut être colorée à l'aide d'une des quatre couleurs du jeu de couleur de C.
On en déduit alors par hypothèse d'équiprobabilité faite sur le choix des couleurs que la probabilité cherchée est $\dfrac{2^n + (-2)^n}{4^n}$.