À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Étude d'une suite

On se propose de déterminer la limite, si elle existe, de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$

On considère alors la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{lcl} [-1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \end{array} \right.$.

On remarque ainsi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A | Étude de la fonction f

Q1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, puis en étudier son signe.

Éléments de correction

La fonction f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$, mais n'est dérivable que sur $]-1;+\infty[$.

Par suite, pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$: $\quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}}$, soit $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}}$ qui donne $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}}$.

Puisque pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, $\quad \sqrt{1+x} > 0$, on en déduit que pour tout $x \in \,]-1;+\infty[$, $\quad f'(x) > 0$.

Q2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f.

Éléments de correction

On a $\dfrac{1+x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition avec la fonction racine carrée, il vient $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Q3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-1;+\infty[$.

Éléments de correction

On a $f(-1) = 0$ et le tableau de variations de f est ainsi :

x	-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$+\infty$

Q4. Justifier alors que : $\forall x \in [0;1], \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$

Éléments de correction

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;+\infty[$, donc *a fortiori* sur $[0;1]$. Par suite, pour tout $x \in [0;1]$, on a $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$. Or $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$ et $f(1) = 1$. Il vient donc pour tout $x \in [0;1]$, $\quad 0 \leq f(x) \leq 1$.

Partie B | Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q5. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0;1]$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$:« $u_n \in [0;1]$ ».
Montrons par récurrence sur n que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on vérifie que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $u_0 \in [0;1]$.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_0 = 0$ et ainsi on a bien $u_0 \in [0;1]$. D'où la propriété $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $u_n \in [0;1]$, et montrons alors l'on a la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ à savoir $u_{n+1} \in [0;1]$.
Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et compte-tenu de la remarque faite, on a : $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.
Or par hyptohèse de récurrence, on a $u_n \in [0;1]$. D'après la question **(1)(d).**, on en déduit puisque $u_n \in [0;1]$, que $0 \leq f(u_n) \leq 1$, ce qui permet d'obtenir $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, c'est à dire $u_{n+1} \in [0;1]$, qui est bien la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0;1]$.

Q6. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\quad 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Éléments de correction

On a montré précédemment que, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{1+x}}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a : $0 \leq x \leq 1$ et par suite $1 \leq x+1 \leq 2$. Les trois membres de cette inégalité étant clairement positifs, et la fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il vient : $\quad 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}$. Les trois membres de cette inégalité étant là encore clairement strictement positifs, et la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient : $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$, et en multipliant cette inégalité par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, on obtient : $\quad \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Or $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Par suite, on en déduit que, pour tout $x \in [0;1]$, $\dfrac{1}{4} \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, et comme $0 \leq \dfrac{1}{4}$, on obtient l'inégalité demandée.

Q7. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$

puis que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - 1|$.

Éléments de correction

La fonction f est continue sur l'intervalle $]0;1[$ et y est dérivable et telle que, pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, c'est à dire $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$ et $1 \in [0;1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, il vient : $|f(u_n) - f(1)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - 1|$.

Or $f(1)=1$ et $f(u_n)=u_{n+1}$, d'où : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-1| \quad (\star)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $|u_n-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0-1|$ », et nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que l'on a bien $|u_0-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0-1|$.

Puisque $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 = 1$, on a clairement $|u_0-1| \leq 1 \times |u_0-1|$, ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a la propriété $\mathcal{P}(n)$, à savoir $|u_n-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0-1|$, et montrons que l'on a alors $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $|u_{n+1}-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0-1|$.

D'après l'inégalité $(\star)$ précédemment établie, on sait que $|u_{n+1}-1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-1|$. Or par hypothèse de récurrence $|u_n-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0-1|$, donc on en déduit que $|u_{n+1}-1| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0-1|$, soit $|u_{n+1}-1| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0-1|$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Q8. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

Puisque $\left|\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right| < 1$, il vient $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par le théorème d'encadrement $u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, c'est à dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Problème n° 2 |

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction $f : x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}$, dont on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

Partie A | Domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et domaine d'étude :

Q9. Montrer que : $(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0\right)$.
Puis résoudre cette dernière équation.

Éléments de correction

Puisque $\mathrm{e}^{x} > 0$ pour tout réel x, on a : $(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = 0)$ Or : $\left(\mathrm{e}^{2x} = 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0\right)$

$(2x = 0)$
C'est à dire $x = 0$.

Q10. En déduire que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. Justifier votre réponse.

Éléments de correction

L'expression $f(x)$ n'a de sens que si son dénominateur $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ est non nul puisque l'on ne peut pas diviser par 0. Or : $(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x \neq 0)$.
Ainsi, on en déduit que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

Q11. Étudier la parité de f. Qu'en déduit-on pour $\mathcal{C}_f$?

Éléments de correction

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $\begin{aligned} f(-x) &= \frac{\mathrm{e}-x + \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} \\ &= -f(x) \end{aligned}$

Ainsi, f est impaire et $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Partie B | Limites de f aux bornes de son ensemble de définition

Q12. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ en justifiant votre réponse. Que dire alors de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x}\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)}{\mathrm{e}^{x}\left(1 - \mathrm{e} - 2x\right)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$. Comme $\mathrm{e}^{-2x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
La fonction f étant impaire, on en déduit donc que $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} = -1$.

Q13. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 avec $x > 0$ en justifiant votre réponse.
On pourra étudier au préalable le signe de $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

Puisque $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{x}\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)$ et que, pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^{-x}<1$, il vient que pour tout $x>0$, $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}>0$.
Puisque $\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}2$ et $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}0$ avec $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient par quotient que $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$.

Q14. Donner une interprétation graphique de ces limites.

Éléments de correction

Puisque $f(x)\underset{x\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$, $\mathcal{C}_f$ présente une asymptote verticale d'équation $x=0$. Par contre, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ donnera une asymptote horizontale d'équation $y=1$, et $f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}-1$ donnera une asymptote horizontale d'équation $y=-1$.

Partie C | Variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$:

Q15. Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

Éléments de correction

$$\text{Pour tout } x>0,\quad f'(x) = \frac{\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)-\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2} = -\frac{4}{\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

Q16. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et en déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Éléments de correction

Il est immédiat que pour tout $x>0$, $f'(x)<0$. Ainsi :

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||	$-$	
Variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	1

Partie D | Étude d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ particulière :

On se propose dans cette partie de déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{C}_f$ où la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y=-x$.

Q17. Quel est en de tels points, le coefficient directeur de $\mathcal{T}$? Quelle équation résoudre alors pour déterminer l'abscisse des points recherchés ?
On ne demande pas à ce stade de la résoudre.

Éléments de correction

La droite d'équation $y=-x$ a pour coefficient directeur -1. Le coefficient directeur de $\mathcal{T}$ est donc -1 et comme ce dernier est égal au nombre dérivé de f en ce point, on doit donc résoudre l'équation $f'(x)=-1$.

Q18. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}=2$.

Éléments de correction

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 2) &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} - 1 = 2\mathrm{e}^{x}\right) \text{ puisque } \mathrm{e}^{x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 1 = 0\right)\end{aligned}$$

On pose alors $\mathrm{e}^{x} = X$, et on est amené à résoudre $X^2 - 2X - 1 = 0$ dont les solutions sont $1+\sqrt{2} > 0$ et $1-\sqrt{2} < 0$. Il reste donc à résoudre $\mathrm{e}^{x} = 1+\sqrt{2}$ qui donnera donc $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Q19. En déduire l'abscisse du (des) point(s) recherché(s).

Éléments de correction

On a : $$\begin{aligned}(f'(x) = -1) &\Leftrightarrow \left((\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x})^2 = 4\right)\\ &\Leftrightarrow ((\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 2) \text{ ou } (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = -2))\end{aligned}$$

La première équation a déjà été résolue, la deuxième conduira sur le même principe de résolution à $x = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$, qui est en fait l'opposé de la première solution trouvée. On remarquera à ce propos qu'il est normal que ce soit le cas, du fait de la symétrie de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Q20. Donner pour chacun d'entre eux, une équation réduite de la tangente.

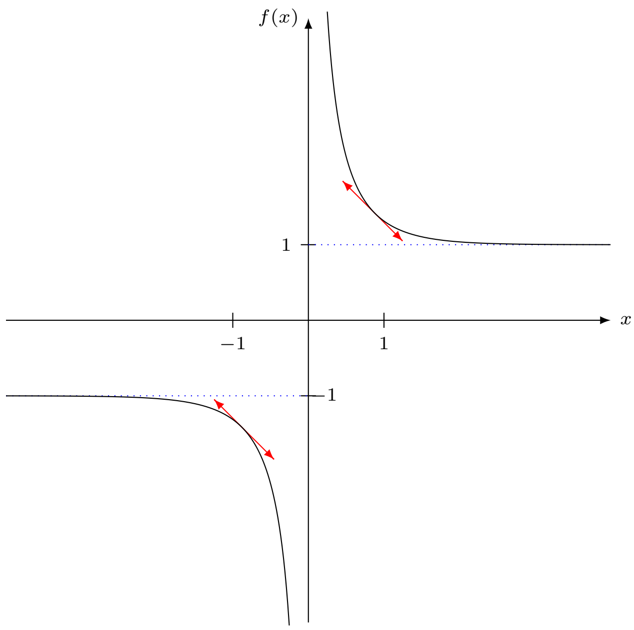
Éléments de correction

- En $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, l'équation réduite de la tangente est alors $y = f'(-1)\left(x - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) + f\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ qui donnera $y = -\left(x - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) - \sqrt{2}$.
- En $x = \ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$, l'équation réduite de la tangente est alors $y = f'(-1)\left(x - \ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right) + f\left(\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right)$ qui donnera $y = -\left(x - \ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right) - \sqrt{2}$.

Q21. Proposer alors une ébauche de $\mathcal{C}_f$ dans un repère d'unité graphique 2 cm.

Éléments de correction

On en déduit alors $\mathcal{C}_f$.



Problème n° 3 | Recherche d'une fonction réciproque

On se propose dans ce problème de montrer que les fonctions $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $g : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ sont réciproques l'une de l'autre.

Partie A | Résultats préliminaires

Soit $h : x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$.

Q22. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h ?

Éléments de correction

L'expression $h(x)$ n'a de sens que si $x^2+1 \geq 0$ puisque l'on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 > 1 \geq 0$. Par suite $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Q23. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} h'(x) &= 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{h(x)}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

Q24. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

Éléments de correction

En utilisant la quantité conjuguée :
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ h(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ &= \frac{x^2+1-x^1}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \end{aligned}$$

Q25. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathcal{D}_h$ et en déduire les variations de h sur $\mathcal{D}_h$.

Éléments de correction

Il est immédiat que $h'(x)$ est du signe de $h(x)$, c'est à dire du signe de $\sqrt{x^2}+1-x$ sur $\mathbb{R}$.

- **Si $x \geq 0$:** il est immédiat que $x^2 \leq x^2+1$ et comme $x \geq 0$, on a par croissance de la fonction carrée que $\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|=x} \leq \sqrt{x^2+1}$ c'est à dire que $x \leq \sqrt{x^2+1}$ soit $0 \leq \sqrt{x^2+1}-x$.
- **Si $x \leq 0$:** il est immédiat que $x^2 \leq x^2+1$ et par croissance de la fonction carrée que $\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|} \leq \sqrt{x^2+1}$ c'est à dire que $|x| \leq \sqrt{x^2+1}$. Or comme $x \leq 0$, on a donc $x \leq |x|$, ce qui assure alors que $x \leq \sqrt{x^2+1}$ et par conséquence que $0 \leq \sqrt{x^2+} - x$.

Ainsi, $h(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, et il en est de même pour $h(x)$.
On en déduit son tableau de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $h'(x)$	$+$
Variations de h	$0 \nearrow +\infty$

Q26. Étudier les limites de h aux bornes de $\mathcal{D}_h$.

Éléments de correction

- Puisque $x^2+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il vient par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et par suite que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2+1} = \dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}$. Or $x - \sqrt{x^2+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par suite, il vient $h(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q27. En déduire le signe de h sur $\mathcal{D}_h$.

Éléments de correction

Puisque $h(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et que h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$.

Partie B | Quelques résultats sur la fonction g

Q28. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_g$ de g ?

Éléments de correction

Il est immédiat que $g : x \longmapsto \ln(h(x))$. Or on a prouvé précédement que $h(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par suite, il vient que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

Q29. Étudier la parité de g.

Éléments de correction

- Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $x- \in \mathcal{D}_g$.
- Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$: $\begin{aligned} g(-x) &= \ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) \end{aligned}$.

  Or $-x+\sqrt{x^2+1} = \dfrac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$.

Ainsi, g est impaire.

Q30. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
Donner alors le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Éléments de correction

La fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles, et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) &= \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

et il est immédiat que $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Q31. Déterminer la limite de g en $+\infty$. En déduire celle de g en $-\infty$.

Éléments de correction

Il est immédiat que $x+\sqrt{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition avec la fonction $\ln$, il vient que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par imparité de g, il vient donc que $g(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Q32. En déduire le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ et préciser la valeur de g en 0.

Éléments de correction

On obtient donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Partie C | Fonction réciproque de g

Q33. Montrer que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

Éléments de correction

On utilise la relation $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ pour transformer le dénominateur : $$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} &= \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Q34. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet une fonction réciproque g^{-1}.

Éléments de correction

La fonction g est telle que :

- g est continue sur $\mathbb{R}$;
- g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $g\left(\left]-\infty;\infty\right[\right) = \left]-\infty;\infty\right[$

Donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et admet ainsi une fonction réciproque g^{-1}, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Q35. Justifier que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Éléments de correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \frac{\mathrm{e}^{g(x)} - \mathrm{e}^{-g(x)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - \mathrm{e}^{-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}}{2} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2} \\ &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{2x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= x \end{aligned}$$

et ainsi $f = g^{-1}$.

Q36. Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

Éléments de correction

$$\begin{aligned} (f(x)=1) &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 2) \\ &\Leftrightarrow (\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} \times 2) \\ &\quad\ \text{puisque : } \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 1 = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(X^2 - 2\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \text{ en posant } X = \mathrm{e}^{x}\right) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation $X^2 - 2X - 1 = 0$ conduit à deux solutions $X_1 = 1+\sqrt{2}$ et $X_2 = 1-\sqrt{2}$.
On résout alors les deux équations $\mathrm{e}^{x} = 1+\sqrt{2}$ et $\mathrm{e}^{x} = 1-\sqrt{2}$, où seule la première a une solution qui est $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.
Par suite, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, qui est $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Q37. Sans utiliser l'expression de $g'(x)$, déterminer la valeur de $g'(1)$.

Éléments de correction

D'après la formule liant la dérivée d'une fonction et celle de sa réciproque, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}$.

Or : $$\begin{aligned} (f(x)=1) &\Leftrightarrow \left(f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x = f^{-1}(1)\right) \end{aligned}$$

De la résolution de $f(x) = 1$, on en déduit donc que $\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = f^{-1}(1)$.

Par, ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Par conséquent :
$$\begin{aligned}
g'(1) &= \frac{1}{\dfrac{e^{f^{-1}(1)}+e^{-f^{-1}(1)}}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{e^{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}+e^{-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{2}+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}{2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^2+1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{4+2\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Problème no 4 | Suite définie de manière implicite

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On définit la fonction f_n par : $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n + 1 - nx \end{array} \right.$.

Partie A | Étude de l'équation $f_n(x) = 0$:

Q38. Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Éléments de correction

La fonction f_n est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ par opération sur les fonctions usuelles.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} - n \\ &= n\left(x^{n-1} - 1\right) \end{aligned}$$

Q39. Montrer que f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;1]$, et dresser son tableau de variation sur cet intervalle.

Éléments de correction

Pour tout $x \in [0;1]$, $x^{n-1} - 1 \geq 0$ et on a : $\left(x^{n-1} - 1 = 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1)$.
On en déduit donc le signe et les variations de f_n' sur l'intervalle $[0;1]$.
Sur l'intervalle $[0;1]$, f_n' est négative et ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, f_n est strictement décroissante sur cet intervalle.

x	0		1
Signe de $f_n'(x)$		$-$	0
Variations de f_n	1	$\searrow$	$1-n$

Q40. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0;1[$, notée x_n.

Éléments de correction

La fonction f_n est continue sur $[0;1]$, stricement décroissante sur $[0;1]$ et telle que $f(0) = 1 > 0$ et $f(1) = 1 - n < 0$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotone, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;1]$, et comme $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 0$, cette solution est dans $]0;1[$.

Partie B | Étude de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$:

On rappelle que pour $n \geq 2$, x_n est l'unique réel de l'intervalle $]0;1[$ qui vérifie $f_n(x_n) = 0$.
On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 2}$ de réels.

Q41. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

Éléments de correction

On a
$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{1}{n}\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{1}{n} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} f_n\left(\frac{2}{n}\right) &= \left(\frac{2}{n}\right)^n + 1 - n \times \frac{2}{n} \\ &= \left(\frac{2}{n}\right)^n - 1 \end{aligned}$$

Q42. En déduire un encadrement de x_n et la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.

Éléments de correction

On remarque que $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$ et $f_n\left(\dfrac{2}{n}\right) < 0$, donc $\dfrac{1}{n} \leq x_n \leq \dfrac{2}{n}$, et par le théorème d'encadrement puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il vient $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q43. Montrer que $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On pourra revenir à une écriture exponentielle de cette puissance.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $(x_n)^n = \mathrm{e}^{n\ln(x_n)}$. Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par composition $\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Finalement $n\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et on en déduit que $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q44. Montrer alors que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Éléments de correction

Puisque x_n est solution de $f_n(x) = 0$, on sait que $(x_n)^n + 1 - nx_n = 0$ soit $nx_n = 1 - (x_n)^n$. Comme $(x_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient que $nx_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q45. En déduire un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $nx_n = \dfrac{x_n}{\frac{1}{n}}$. De $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ ce qui signifie bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Partie C | Variations de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

Q46. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0;1]$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On a : $\forall x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= x^{n+1} + 1 - (n+1)x - x^n - 1 + nx \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x\left(x^n - x^{n-1} - 1\right) \\ &= x\left(x^{n-1}(x-1) - 1\right) \end{aligned}$$

Or pour tout $x \in [0;1]$:

$$\underbrace{\underbrace{x}_{\geq 0}\left(\underbrace{\underbrace{x^{n-1}}_{\geq 0}\underbrace{(x-1)}_{\leq 0}}_{\leq 0}\underbrace{-1}_{\leq 0}\right)}_{\leq 0}$$

Par conséquent, pour tout $x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

Q47. En déduire alors le signe de $f_{n+1}(x_n)$.

Éléments de correction

Il vient donc $f_{n+1}(x_n) - \underbrace{f_n(x_n)}_{=0} \leq 0$ et par suite $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.

Q48. En déduire alors les variations de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.

Éléments de correction

Par définition des termes de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$, x_{n+1} est tel que $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$. Puisque f_{n+1} est décroissante sur $[0;1]$ et que $f_{n+1}(x_n) \leq 0$, il vient $x_{n+1} \leq x_n$, et par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est une suite décroissante.