**Important**

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

## Problème nº 1 | Suites imbriquées

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $w_n = v_n - u_n$.

**Q1.** Calculer $u_1$, $v_1$, $u_2$ et $v_2$.

**Q2.** Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_{n+1} = \dfrac{1}{4} w_n$.

**Q3.** Qu'en déduire pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Q4.** Exprimer le terme général $w_n$ de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $n$.

**Q5.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n \geq 0$.

**Q6.** Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Q7.** Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q8.** Étudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q9.** Que dire alors des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Q10.** Que peut-on en déduire pour la convergence des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Q11.** On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $t_n = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

Calculer $t_0$, $t_1$, $t_2$ ? Que peut-on conjecturer pour la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

**Q12.** Démontrer la conjecture faite à la question précédente.

**Q13.** En notant $\ell$ la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer $\ell$.

## Problème n° 2 | Puissance d'une matrice satisfaisant une condition

Dans tout ce qui suit :
- $p$ désigne un entier naturel non nul :
- $\mathrm{I}_p$ désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ ;
- $A$ désigne une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation $(\star_1)$ : $\quad (A+\mathrm{I}_p)\,(A-2\mathrm{I}_p)=(0)$.

L'objet de ce problème est de calculer $A^n$ où $n\in\mathbb{N}$ de deux façons.

### Partie 0 | Préliminaire technique

**Q14.** Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $\quad (\star_2)$ : $\begin{cases} u_0 &= 0\\ u_1 &= 1\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} &= u_{n+1}+2u_n\end{cases}$

### Partie 1 | Un premier calcul de $A^n$

On rappelle que $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est telle que : $\quad (\star_1)$ : $(A+\mathrm{I}_p)\,(A-2\mathrm{I}_2)=(0)$.

**Q15.** Montrer que $A$ vérifie aussi la relation $(A-2\mathrm{I}_p)\,(A+\mathrm{I}_p)=(0)$.

**Q16.** À l'aide de $(\star_1)$, exprimer $A^2$ en fonction de $A$ et de $\mathrm{I}_p$.

**Q17.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ : « Il existe deux réels $u_n$ et $v_n$ tels que $(\star_3)$ : $\begin{cases} A^n &= u_nA+v_nI_p\\ u_{n+1} &= u_n+v_n\\ v_{n+1} &= 2u_n\end{cases}$ ».
Vérifier que les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies en précisant les valeurs de $u_0$, $u_1$, $v_0$ et $v_1$.

**Q18.** Montrer alors par récurrence sur l'entier $n$, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

**Q19.** On considère alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations $(\star_3)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi $(\star_2)$.

**Q20.** Déterminer alors les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Q21.** En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $A$, $\mathrm{I}_p$ et $n\in\mathbb{N}$.

### Partie 2 | Application pour une matrice $3\times 3$

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

**Q22.** Calculer $J^2$.

**Q23.** En remarquant que $A=J-\mathrm{I}_3$ en déduire que $A$ vérifie $(\star_1)$.

**Q24.** Expliciter la matrice $A^n$ où $n\in\mathbb{N}$.

### Partie 3 | Un autre mode de calcul de $A^n$

On se propose dans cette partie de calculer $A^n$ pour $n\in\mathbb{N}$ d'une autre manière pour $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $(\star_1)$.

**Q25.** Calculer $(A+\mathrm{I}_p)^2$ et $(A-2\mathrm{I}_p)^2$. Que remarque-t-on ?

**Q26.** Déduire de la question précédente une expressionde $(A+\mathrm{I}_p)^n$ et de $(A-2\mathrm{I}_p)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

**Q27.** Montrer que $A$ est combinaison linéaire de $A+\mathrm{I}_p$ et de $A-2\mathrm{I}_p$.

**Q28.** En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$, $A$ et $\mathrm{I}_p$. Comparer avec les résultats précédents.

## Problème n° 3 | Suites et matrices

Dans tout ce problème, on désigne par $A$ la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

### Partie 0 | Préliminaire technique

**Q29.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

### Partie 1 | Obtention de termes généraux de suites

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, a_{n+1} & = & 2a_n + 3^n \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b_0 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, b_{n+1} & = & 3b_n + 3^n \end{array} \right.$$

et pour tout entier naturel $n$, on définit la matrice colonne $X_n$ par $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

**Q30.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre $X_n$, $X_{n+1}$ et $A$.

**Q31.** Exprimer alors $X_n$ en fonction de $A$ et de $X_0$. On ne demande pas de justifier la réponse.

**Q32.** Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n + 3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$.

### Partie 2 | Calcul de la puissance d'une matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Q33.** Montrer que $P$ est inversible, et déterminer $P^{-1}$.

**Q34.** Calculer $PM$ et $AP$. Exprimer alors $M$ en fonction de $A$, $P$ et $P^{-1}$.

**Q35.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, on a $M^n = P^{-1}A^nP$.

**Q36.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter alors la matrice $M^n$.

### Partie 3 | Un calcul de somme

**Q37.** Montrer que pour tout entier naturel $k$, on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

**Q38.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justification, exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k$ en fonction de $n$.

**Q39.** À l'aide de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k)$, en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1}$ en fonction de $n$.

## Problème n° 4 | Voyage en Mésopotamie

Les babyloniens (environ 2000 ans av. JC) utilisaient comme valeur approchée de $\sqrt{a}$ le rationnel $\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$ avec $b$ un rationnel proche de $\sqrt{a}$. Mais en itérant ce procédé, on obtient une valeur approchée de plus en plus fine de $\sqrt{a}$.

Le but de ce problème est d'utiliser ce principe pour approximer $\sqrt{2}$.

Les trois parties de ce problème **ne sont pas indépendantes**.

### Partie 1 | Une étude de fonction

Soit $f$ la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} ]0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \end{array} \right.$.

**Q40.** Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in ]0;+\infty[$, puis en étudier son signe.

**Q41.** En déduire le tableau de variation de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**Q42.** Justifier alors que, pour tout $x > 0$, $\quad f(x) \geq \sqrt{2}$.

**Q43.** Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

### Partie 2 | Construction d'une suite convergente vers $\sqrt{2}$.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \end{cases}$.

On remarquera ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad a_{n+1} = f(a_n)$.

**Q44.** Calculer $a_1$ et $a_2$ en donnant le résultat sous forme fractionnaire.

**Q45.** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_n \geq \sqrt{2}$.

**Q46.** Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang $1$.

**Q47.** Démontrer alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel $\ell$.

**Q48.** Justifier que $\ell$ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$, et conclure quand à la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### Partie 3 | Performance de la convergence

**Q49.** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$

**Q50.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2}$

**Q51.** On admet que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$.

Résoudre l'inéquation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$ : $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} \leq 10^{-100}$.

**Q52.** On admet que la résolution de l'inéquation précédente conduit à la valeur $n \geq 8$. Comment interpréter $a_8$ ?

## Tempore relaxationis post officium

**Q53.** Jules Poincaré, mathématicien français (1854-1912), a dit :

« Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? ».

Au regard de votre expérience personnelle, exprimer votre position sur ce point en 5 lignes.