À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

Problème n° 1 | Suites imbriquées

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $w_n = v_n - u_n$.

Q1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

Éléments de correction

Par définition $u_1 = \dfrac{u_0 + v_0}{1} = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$.

De même, $v_1 = \dfrac{u_1 + v_0}{2} = \dfrac{\frac{7}{2} + 4}{2} = \dfrac{15}{4}$.

Sur le même principe, $u_2 = \dfrac{u_1 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{29}{8}$ et $v_2 = \dfrac{u_2 + v_1}{2} = \dfrac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2} = \dfrac{59}{16}$.

Q2. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_{n+1} = \dfrac{1}{4} w_n$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} - \frac{u_n - v_n}{2} \\ &= \frac{u_n - v_n}{4} - \frac{u_n - v_n}{2} \\ &= -\frac{1}{4}(u_n - v_n) \\ &= \frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

Q3. Qu'en déduire pour la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Éléments de correction

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

Q4. Exprimer le terme général w_n de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Éléments de correction

On sait alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \times w_0$ soit $w_n = \dfrac{1}{4^n}$.

Q5. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_n \geq 0$.

Éléments de correction

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant géométrique de premier terme $w_0 = 1$ et de raison $\dfrac{1}{4} > 0$, cette dernière a donc clairement tous ses termes positifs.

Q6. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Éléments de correction

La raison de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant $\dfrac{1}{4}$ donc vérifiant $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$. Ainsi $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

On doit étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a ici :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} w_n \end{aligned}$$

Or $w_n \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Q8. Étudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

On doit étudier le signe de $v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a ici :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - v_n \\ &= \frac{\frac{u_n + 3v_n}{2}}{3} - v_n \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n \\ &= \frac{u_n - v_n}{4} \\ &= -\frac{1}{4} w_n \end{aligned}$$

Or $w_n \geq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.
Par suite, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Q9. Que dire alors des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Éléments de correction

Ainsi les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont telles que $\begin{cases} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0 \end{cases}$. Ainsi, les deux suites sont adjacentes.

Q10. Que peut-on en déduire pour la convergence des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Éléments de correction

Ces deux suites convergent donc toute les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Q11. On considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est $t_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

Calculer t_0, t_1, t_2 ? Que peut-on conjecturer pour la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Éléments de correction

On obtient directement $t_0 = \frac{1}{3}(3 + 2\times 4) = \frac{11}{3}$, puis $t_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2} + 2\times\frac{15}{4}\right) = \frac{11}{3}$ et $t_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{29}{8} + 2\times\frac{59}{16}\right) = \frac{11}{3}$.
Il semblerait ainsi que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante égale à $\frac{11}{3}$.

Q12. Démontrer la conjecture faite à la question précédente.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $t_{n+1} = t_n$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$.
Par définition de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $t_{n+1} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2v_{n+1})$. Ainsi, $t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2} + 2\frac{u_{n+1}+v_n}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2} + u_{n+1} + v_n\right)$. Par suite, il vient : $t_{n+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{u_n+v_n}{2} + \frac{u_n+v_n}{2} + v_n\right) = \frac{1}{3}\frac{2u_n+4v_n}{2} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = t_n$.
Par conséquent, la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien constante égale à $\frac{11}{3}$.

Q13. En notant ℓ la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer ℓ.

Éléments de correction

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{11}{3} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$, ou encore $11 = u_n + 2v_n$.
Par passage à la limite, il vient ainsi $11 = \ell + 2\ell$ et donc $\ell = \frac{11}{3}$.

Problème n° 2 | Puissance d'une matrice satisfaisant une condition

Dans tout ce qui suit :
- p désigne un entier naturel non nul :
- I_p désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$;
- A désigne une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation $(\star_1)$: $\quad (A+\mathrm{I}_p)(A-2\mathrm{I}_p)=(0)$.

L'objet de ce problème est de calculer A^n où $n\in\mathbb{N}$ de deux façons.

Partie 0 | Préliminaire technique

Q14. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations : $(\star_2)$: $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} & = & u_{n+1}+2u_n \end{array}\right.$

Éléments de correction

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, puisque :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-u_{n+1}-2u_n=0$$

et dont son équation caractéristique est $(\star)$: $r^2-r-2=0$.
Le discriminant Δ de $(\star)$ étant $\Delta=9>0$, elle admet deux solutions réelles $r_1=-1$ et $r_2=2$, par théorème, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda\times(-1)^n+\mu\times 2^n$.
Par ailleurs (λ,μ) doit satisfaire les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda\times(-1)^0+\mu\times 2^0 & = & u_0 \\ \lambda\times(-1)^1+\mu\times 2^1 & = & u_1 \end{array}\right.$.
Ainsi, (λ,μ) est solution du système $\left\{\begin{array}{l} \lambda+\ \mu=0 \\ -\lambda+2\mu=1 \end{array}\right.$, que l'on résout par échelonnement de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2\leftarrow \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Par suite, il vient que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=-\dfrac{1}{3}\times(-1)^n+\dfrac{1}{3}\times 2^n$.

Partie 1 | Un premier calcul de A^n

On rappelle que $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est telle que : $\quad (\star_1)\ : (A+\mathrm{I}_p)(A-2\mathrm{I}_2)=(0)$.

Q15. Montrer que A vérifie aussi la relation $(A-2\mathrm{I}_p)(A+\mathrm{I}_p)=(0)$.

Éléments de correction

$$\begin{array}{rcl} (A-2\mathrm{I}_p)(A+\mathrm{I}_p) & = & A^2+A\mathrm{I}_p-2\mathrm{I}_pA-2\mathrm{I}_p^2 \\ & = & A^2+A-2A-2\mathrm{I}_p \\ & = & A^2-A-2\mathrm{I}_p \end{array}.$$

Par ailleurs : $\begin{array}{rcl} (A+\mathrm{I}_p)(A-2\mathrm{I}_p) & = & A^2-2A\mathrm{I}_p+\mathrm{I}_pA-2\mathrm{I}_p^2 \\ & = & A^2-2A+A-2\mathrm{I}_p \\ & = & A^2-A-2\mathrm{I}_p \end{array}$, et comme A vérifie $(\star_1)$, cette dernière relation est nulle. D'où le résultat.

Q16. À l'aide de $(\star_1)$, exprimer A^2 en fonction de A et de I_p.

Éléments de correction

Des deux développements précédents, on peut en déduire que $A^2=A+2\mathrm{I}_p$.

Q17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « Il existe deux réels u_n et v_n tels que $(\star_3)$: $\left\{\begin{array}{rcl} A^n & = & u_n A + v_n I_p \\ u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n \end{array}\right.$ ».

Vérifier que les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies en précisant les valeurs de u_0, u_1, v_0 et v_1.

Éléments de correction

Vérification pour $n = 0$ **:** on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire qu'il existe deux réels u_0 et v_0 tels que $A^0 = u_0 A + v_0 \mathrm{I}_p$.
Par définition $A^0 = \mathrm{I}_p$, donc on a bien $A^0 = \underbrace{0}_{=u_0} A + \underbrace{1}_{=v_0} \mathrm{I}_p$, ce qui est donc $\mathcal{P}(0)$.

Vérification pour $n = 1$ **:** on vérifie que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, c'est à dire qu'il existe deux réels u_1 et v_1 tels que $A^1 = u_1 A + v_1 \mathrm{I}_p$.
Par définition $A^1 = A$, donc on a bien $A^1 = \underbrace{1}_{=u_1} A + \underbrace{0}_{=v_1} \mathrm{I}_p$, ce qui est donc $\mathcal{P}(1)$.

Q18. Montrer alors par récurrence sur l'entier n, que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}_p$ ».
On va montrer par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

- **Initialisation :** on vérifie que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire qu'il existe deux réels u_0 et v_0 tels que $A^0 = u_0 A + v_0 \mathrm{I}_p$.
  Par définition $A^0 = \mathrm{I}_p$, donc on a bien $A^0 = \underbrace{0}_{=u_0} A + \underbrace{1}_{=v_0} \mathrm{I}_p$, ce qui est donc $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité :** supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait la proposition $\mathcal{P}(n)$ et montrons sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
  Par définition $A^{n+1} = A^n A$. Par hypothèse de récurrence, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}_p$.
  Par conséquent, on a : $A^{n+1} = (u_n A + v_n \mathrm{I}_p)\, A = u_n A^2 + v_n A$.
  Or on a $A^2 = A + 2\mathrm{I}_p$, donc : $A^{n+1} = u_n (A + 2\mathrm{I}_p) + v_n A$, qui donnera : $A^{n+1} = (u_n + v_n)\, A + 2u_n \mathrm{I}_p$.
  Ainsi, en posant $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$, il existe bien donc deux réels u_{n+1} et v_{n+1} tels que $A^{n+1} = u_{n+1} A + v_{n+1} \mathrm{I}_p$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.
- **Conclusion :** la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}_p$.

On définit ainsi deux suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les relations : $\forall n \in \mathbb{N} \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n \end{array}\right.$.

Par ailleurs, on a $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{array}\right.$ d'après l'initialisation, et même puisque $A^1 = 1A + 0\mathrm{I}_p$, il vient $\left\{\begin{array}{l} u_1 = 1 \\ v_1 = 0 \end{array}\right.$.

Q19. On considère alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations $(\star_3)$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi $(\star_2)$.

Éléments de correction

De $(\star_4)$, on tire : $u_{n+2} = u_{n+1} + v_{n+1}$, et comme $v_{n+1} = 2u_n$, il vient : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, c'est à dire que l'on retrouve $(\star_2)$.

Q20. Déterminer alors les expressions des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc $(\star_2)$ et est telle que $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{array}\right.$, d'après la partie **Préliminaires**, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^n\right)$$

Puisque $v_{n+1} = 2u_n$, il vient $v_n = 2u_{n-1}$ et par suite : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{2}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right)$.

Q21. En déduire l'expression de A^n en fonction de A, I_p et $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $A^n = u_n A + v_n \mathrm{I}_p$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^n\right) A + \frac{2}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) \mathrm{I}_p$$

Partie 2 | Application pour une matrice 3×3

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Q22. Calculer J^2.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3J \end{aligned}$$

Q23. En remarquant que $A = J - \mathrm{I}_3$ en déduire que A vérifie $(\star_1)$.

Éléments de correction

On a directement que :
$$\begin{aligned} (A + \mathrm{I}_3)(A - 2\mathrm{I}_3) &= (J - \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_3)(J - \mathrm{I}_3 - 2\mathrm{I}_3) \\ &= J(J - 3\mathrm{I}_3) \\ &= J^2 - 3J \\ &= 3J - 3J \\ &= 2(0) \end{aligned}$$

et donc A vérifie bien $(\star_1)$.

Q24. Expliciter la matrice A^n où $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

D'après ce qui précède on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^n\right) A + \frac{2}{3}\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) \mathrm{I}_p$

Ainsi, on en déduit directement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2\left((-1)^n + 2^{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

Partie 3 | Un autre mode de calcul de A^n

On se propose dans cette partie de calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ d'une autre manière pour $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ vérifiant $(\star_1)$.

Q25. Calculer $(A + \mathrm{I}_p)^2$ et $(A - 2\mathrm{I}_p)^2$. Que remarque-t-on ?

Éléments de correction

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}(A+\mathrm{I}_p)^2 &= (A+\mathrm{I}_p)(A+\mathrm{I}_p)\\ &= A^2+A+A+\mathrm{I}_p\\ &= A^2+2A+\mathrm{I}_p\\ &= A+2\mathrm{I}_p+2A+\mathrm{I}_p\\ &= 3A+3\mathrm{I}_p\\ &= 3(A+\mathrm{I}_p)\end{aligned}$$

et on a aussi : $$\begin{aligned}(A-2\mathrm{I}_p)^2 &= (A-2\mathrm{I}_p)(A-2\mathrm{I}_p)\\ &= A^2-2A-2A+4\mathrm{I}_p\\ &= A^2-4A+4\mathrm{I}_p\\ &= A+2\mathrm{I}_p-4A+4\mathrm{I}_p\\ &= -3A+6\mathrm{I}_p\\ &= -3(A-2\mathrm{I}_p)\end{aligned}$$

Q26. Déduire de la question précédente une expressionde $(A+\mathrm{I}_p)^n$ et de $(A-2\mathrm{I}_p)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Éléments de correction

On obtient directement que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (A+\mathrm{I}_p)^n = 3^{n-1}(A+\mathrm{I}_p)$ et $(A-2\mathrm{I}_p)^n = (-3)^{n-1}(A-2\mathrm{I}_p)$

Q27. Montrer que A est combinaison linéaire de $A+\mathrm{I}_p$ et de $A-2\mathrm{I}_p$.

Éléments de correction

On remarque directement que $A=\frac{2}{3}(A-\mathrm{I}_p)+\frac{1}{3}(A+2\mathrm{I}_p)$.

Q28. En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I_p. Comparer avec les résultats précédents.

Éléments de correction

Il est immediat que $(A+\mathrm{I}_p)(A-2\mathrm{I}_p)=(A-2\mathrm{I}_p)(A+\mathrm{I}_p)$.
Par suite d'après la formule du binôme de Nexton, il vient :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}(A+\mathrm{I}_p)\right)^k\left(\frac{1}{3}(A-2\mathrm{I}_p)\right)^{n-k}\\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{2}{3}(A+\mathrm{I}_p)\right)^0\left(\frac{1}{3}(A-2\mathrm{I}_p)\right)^n+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}(A+\mathrm{I}_p)\right)^k\left(\frac{1}{3}(A-2\mathrm{I}_p)\right)^{n-k}}_{=(0)}\\ &\quad+\binom{n}{n}\left(\frac{2}{3}(A+\mathrm{I}_p)\right)^n\left(\frac{1}{3}(A-2\mathrm{I}_p)\right)^0\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n(A-2\mathrm{I}_p)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n(A+\mathrm{I}_p)^n\\ &= \frac{1}{3^n}\times(-3)^{n-1}(A-2\mathrm{I}_p)+\frac{2^n}{3^n}\times 3^{n-1}(A+\mathrm{I}_p)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{3}(A-2\mathrm{I}_p)+\frac{2^n}{3}(A+\mathrm{I}_p)\\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n-1}+2^n\right)A+\frac{1}{3}\left(2^n-2\times(-1)^{n-1}\right)\mathrm{I}_p\\ &\underset{\substack{n-1 \text{ et } n+1\\ \text{ont la même parité}}}{=} \frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)A+\frac{2}{3}\left(2^{n-1}-(-1)^{n-1}\right)\mathrm{I}_p\\ &= \frac{1}{3}\left(2^n+(-1)^{n+1}\right)A+\frac{2}{3}\left(2^{n-1}+(-1)^{n}\right)\mathrm{I}_p\end{aligned}$$

Problème n° 3 | Suites et matrices

Dans tout ce problème, on désigne par A la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Partie 0 | Préliminaire technique

Q29. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on sait que $A^0 = \mathrm{I}_3$ et on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 03^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$

et donc $A^0 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 03^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$ ce qui est $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}$

On sait que $A^{n+1} = A \times A^n$.

Donc par hypothèse de récurrence, il vient :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + 0 \times 0 + 1 \times 0 & 2 \times 0 + 0 \times 3^n + 1 \times 0 & 2\left(3^n - 2^n\right) + 0 \times n3^{n-1} + 1 \times 3^n \\ 0 \times 2^n + 3 \times 0 + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 3 \times 3^n + 1 \times 0 & 0 \times \left(3^n - 2^n\right) + 3 \times n3^n + 1 \times 3^n \\ 0 \times 2^n + 0 \times 0 + 3 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 3^n + 3 \times 0 & 0 \times \left(3^n - 2^n\right) + 0 \times n3^{n-1} + 3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & 3n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3 \times 3^n - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1)3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Partie 1 | Obtention de termes généraux de suites

On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$\begin{cases} a_0 &= 2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1} &= 2a_n+3^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 &= 0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1} &= 3b_n+3^n \end{cases}$$

et pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix}$.

Q30. Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner une relation entre X_n, X_{n+1} et A.

Éléments de correction

On remarque que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n+3^n \\ 3b_n+3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$

et ainsi : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.

Q31. Exprimer alors X_n en fonction de A et de X_0. On ne demande pas de justifier la réponse.

Éléments de correction

On obtient directement que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ X_n = A^nX_0$.

Q32. Montrer alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\quad a_n = 2^n+3^n$ et $b_n = n3^{n-1}$.

Éléments de correction

Il vient alors que : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n-2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2^n+0\times 0+(3^n-2^n)\times 1 \\ 0\times 2+3^n\times 0+n3^{n-1}\times 1 \\ 0\times 2+0\times 0+3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n+3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$

Donc : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} 2^n+3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}$

Par suite, par construction de X_n, on a : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\ a_n = 2^n+3^n$ et $B_n = n3^{n-1}$.

Partie 2 | Calcul de la puissance d'une matrice

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q33. Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1}.

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée de la matrice identitée afin de déterminer le rang de cette dernière et s'assurer de son inversibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -1L_1 \\ L_3 \leftarrow -1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Q34. Calculer PM et AP. Exprimer alors M en fonction de A, P et P^{-1}.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} PM &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et de même, on a :

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $PM = AP$, et donc en multipliant cette égalité à gauche par P^{-1}, il vient $M = P^{-1}AP$.

Q35. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $M^n = P^{-1}A^nP$.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = P^{-1}A^nP$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a que $M^0 = \mathrm{I}_3$, et aussi que :
$$\begin{aligned} P^{-1}A^0P &= P^{-1}\mathrm{I}_3P \\ &= P^{-1}P \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$
et ainsi $M^0 = P^{-1}A^0P$ ce qui est bien $\mathcal{P}(n)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $M^n = P^{-1}A^nP$.
Montrons, sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $M^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$.
On sait que $M^{n+1} = M \times M^n$.
Par suite, par hypothèse de récurrence, on a :
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= P^{-1}AP \times P^{-1}A^nP \\ &= P^{-1}A \times A^nP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P \end{aligned}$$
ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q36. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter alors la matrice M^n.

Éléments de correction

Un calcul direct donne alors que :

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n & 0 & 2^n - 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2^n & 0 & 2^{n+1} \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Partie 3 | Un calcul de somme

Q37. Montrer que pour tout entier naturel k, on a : $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

Éléments de correction

On a directement que : $$\forall k \in \mathbb{N},\ b_{k+1} - b_k - 3^k = 3b_k + 3^k - b_k - 3^n = 2b_k$$

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justification, exprimer $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ en fonction de n.

Éléments de correction

Puisque $3 \neq 1$, on a : $$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{1}{2}\left(3^{n+1} - 1\right)$$

Q39. À l'aide de la somme $\sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k)$, en déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1}$ en fonction de n.

Éléments de correction

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N},\ 2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

Ainsi : $$\sum_{k=0}^{n} 2b_k = \sum_{k=0}^{n} \left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) = \sum_{k=0}^{n} (b_{k+1} - b_k) - \sum_{k=0}^{n} 3^k = b_{n+1} - b_0 - \sum_{k=0}^{n} 3^k$$

Or $\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} k3^{k-1}$, et donc on en déduit que : $\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} = \frac{1}{2}\left((n+1)3^n - 2\left(3^{n+1} - 1\right)\right)$.

Problème n° 4 | Voyage en Mésopotamie

Les babyloniens (environ 2000 ans av. JC) utilisaient comme valeur approchée de $\sqrt{a}$ le rationnel $\frac{1}{2}\left(b+\frac{a}{b}\right)$ avec b un rationnel proche de $\sqrt{a}$. Mais en itérant ce procédé, on obtient une valeur approchée de plus en plus fine de $\sqrt{a}$.

Le but de ce problème est d'utiliser ce principe pour approximer $\sqrt{2}$.

Les trois parties de ce problème **ne sont pas indépendantes**.

Partie 1 | Une étude de fonction

Soit f la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right) \end{array}\right.$.

Q40. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, puis en étudier son signe.

Éléments de correction

On commence par calculer la dérivée de f. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$ qui vaut donc $f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2}$ qui est du signe de x^2-2. On en déduit que f est décroissante sur $\left]0;\sqrt{2}\right]$ et croissante sur $\left[\sqrt{2};+\infty\right[$.

Q41. En déduire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

Éléments de correction

D'où le tableau de variation de f :

x	0			$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	||		-	0	+	
Variations de f	||	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Q42. Justifier alors que, pour tout $x > 0$, $\quad f(x) \geq \sqrt{2}$.

Éléments de correction

f présente donc en $x=\sqrt{2}$ un minimum qui vaut $f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, soit $f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$. Ainsi, pour tout $x \in {}_+^*$, on a $f(x) \geq \sqrt{2}$.

Q43. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

Éléments de correction

On résout l'équation sur $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = x \\ & \Leftrightarrow \quad x+\frac{2}{x} = 2x \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{2}{x} = x \\ & \Leftrightarrow \quad 2 = x^2 \text{ puisque } x \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Partie 2 | Construction d'une suite convergente vers $\sqrt{2}$.

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \end{cases}$.

On remarquera ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} = f(a_n)$.

Q44. Calculer a_1 et a_2 en donnant le résultat sous forme fractionnaire.

Éléments de correction

Par définition, on a : $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a_0 + \dfrac{2}{a_0}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = \dfrac{3}{2}$.

Ensuite, $a_2 = \dfrac{1}{2}\left(a_1 + \dfrac{2}{a_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{15}{6} = \dfrac{17}{12}$.

Q45. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq \sqrt{2}$.

Éléments de correction

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $\mathcal{P}_n$ donnée par : « $a_n \geq \sqrt{2}$ ».

Initialisation : $a_1 = \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{3}{2} \geq \sqrt{2}$ donc $a_1 \geq \sqrt{2}$ et la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : on suppose que pour un $n \geq 1$ entier donné, on a la propriété $\mathcal{P}_n$, à savoir « $a_n \geq \sqrt{2}$ », et on veut montrer que l'on a $\mathcal{P}_{n+1}$ à savoir « $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$ ».
On sait que $a_n \geq \sqrt{2}$, donc $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ et on peut donc calculer $a_{n+1} = f(a_n)$. Or d'après la question précedente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq \sqrt{2}$, on en déduit puisque $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ que $f(a_n) \geq \sqrt{2}$ et ainsi $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$ qui est bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{P}_1$ étant vraie, et la propriété $\mathcal{P}_n$ étant héréditaire à partir du rang 1, on en déduit qu'elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq \sqrt{2}$.

Q46. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang 1.

Éléments de correction

Pour $n \geq 1$, on évalue la quantité $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}a_n$$

soit $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2 - a_n^2}{a_n}$ et puisque $a_n \geq 2$, on en déduit que $a_{n+1} - a_n \leq 0$ et ainsi $a_{n+1} - a_n \leq 0$. Ceci étant vrai pour tout entier n, on en déduit que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq a_n$, autrement dit que la suite est décroissante à partir du rang 1.

Q47. Démontrer alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ.

Éléments de correction

La suite (a_n) étant décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{2}$, on sait donc qu'elle est convergente.

Q48. Justifier que ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$, et conclure quand à la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Éléments de correction

Par passage à la limite dans la relation $a_{n+1} = f(a_n)$, si on note $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, on aura nécessairement $\ell \geq \sqrt{2}$ et $\ell = f(\ell)$ autrement dit, ℓ est solution de l'équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{\ell}\right)$$

La résolution de cette dernière donne $\ell = \sqrt{2}$.

Partie 3 | Performance de la convergence

Q49. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$

Éléments de correction

On écrit $a_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) - \sqrt{2}$ qui donne : $\quad a_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{a_n^2 + 2 - 2a_n\sqrt{2}}{2a_n}$.

Or $a_n^2 + 2 - 2a_n\sqrt{2} = (a_n - \sqrt{2})^2$, donc : $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| = \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n}$.

Q50. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2}$

Éléments de correction

Puisque $a_n \geq \sqrt{2}$, on en déduit que $2a_n \geq 2\sqrt{2} \geq 2$, donc par passage à l'inverse (puisque tout est positif) : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{2}a_n$

et par suite que : $\quad |a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2}$

Q51. On admet que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1}$.

Résoudre l'inéquation d'inconnue $n \in \mathbb{N}$: $\quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} \leq 10^{-100}$.

Éléments de correction

On résoud l'inégalité proposée. On a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n+1}-1} = \mathrm{e}^{-(2^{n+1}-1)\ln 2}$ et $10^{-100} = \mathrm{e}^{-100\ln 10}$. On en déduit que l'inégalité précédente est équivalente à :

$$-(2^{n+1} - 1)\ln 2 \leq -100\ln 10$$

qui est équivalent à :

$$2^{n+1} \geq \frac{-100\ln 10}{-\ln 2} + 1$$

Or $2^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln 2}$ et $\dfrac{-100\ln 10}{-\ln 2} + 1 = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{-100\ln 10}{-\ln 2}+1\right)}$, on en déduit que :

$$n + 1 \geq \ln\left(\frac{-100\ln 10}{-\ln 2} + 1\right)$$

soit

$$n \geq \ln\left(\frac{-100\ln 10}{-\ln 2} + 1\right) - 1$$

qui donne (si on avait un outil de calcul...) $n \geq 7.38$ autrement dit $n = 8$.

Q52. On admet que la résolution de l'inéquation précédente conduit à la valeur $n \geq 8$. Comment interpréter a_8 ?

Éléments de correction

On en déduit que a_8 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près !

Tempore relaxationis post officium

Q53. Jules Poincaré, mathématicien français (1854-1912), a dit :

« Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ? ».

Au regard de votre expérience personnelle, exprimer votre position sur ce point en 5 lignes.