Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Problème n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit la suite $(V_n)_{n\geq 2}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ V_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$

On se propose dans cet exercice d'étudier la nature des deux séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$ où $(u_n)_{n\geq 2}$ est la suite de terme général donné par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ u_n = \mathrm{e}^{V_n}$.

Partie A - Étude du terme géneral de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0, on a : $\ln\left(2-\mathrm{e}^{x}\right) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Q2. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in \,]0;1[$.

Q3. En déduire le signe de $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Q4. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$?

Q5. Déterminer si elles existent, les limites des suites $(V_n)_{n\geq 2}$ et $(u_n)_{n\geq 2}$.

Partie B - Étude de la convergence de la série $\sum u_n$

Q6. Montrer que : $\ln\left(u_n\right) = \sum_{k=2}^{n}\left(\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$

Q7. Déterminer un équivalent quand k tend vers $+\infty$ de $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Q8. En déduire que u_n est équivalent quand n tend vers $+\infty$, à $\frac{K}{n}$ où K est un réel strictement positif.

Quelle est alors la nature de la série de terme général u_n ?

Partie C - Étude de la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$

On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k$.

Q9. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Q10. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes.

Q11. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Problème n° 2

On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i^{e} tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche, et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ permettant de modéliser cette expérience, et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partie A - Recherche de la loi de X_n

Q12. Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
On distinguera les trois cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$.

Q13. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, U_{n+1} = MU_n$.
Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Q14. Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.

Q15. En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$

Q16. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

Q17. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Loi de T_1 et de T_2

Q18. Reconnaître la loi de T_1.

Q19. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i.

En déduire alors les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2 = 2])$ et $\mathbb{P}([T_2 = 3])$.

Q20. Pour tout entier $n \geq 2$, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

Q21. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\mathbb{P}([T_2 = n]) = 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

Q22. Montrer alors que T_2 admet une espérance, et la calculer.

Problème n° 3

Partie A - Préliminaire technique

Q23. Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, la série numérique $\sum nx^n$ est une série convergente.

Q24. Montrer que : $\forall x \in]-1;1[\,,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Q25. On admet que pour tout $x \in]-1;1[$, la série numérique $\sum n^2x^n$ est une série convergente.

Montrer que : $\forall x \in]-1;1[\,,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

Partie B - Étude d'une première variable aléatoire

On dispose d'une pièce de monnaie amenant « Pile » avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et « Face » avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

On effectue une succession de lancers indépendants avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de « Face » obtenus avant l'obtention du deuxième « Pile ».

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k les événements « obtenir « Pile » au k^{e} lancer » et on note $F_k = \overline{P_k}$.

Q26. Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$ et $[X=2]$ à l'aide des événements P_k et F_k.

Q27. Calculer les probabilités des événements $[X=0]$, $[X=1]$ et $[X=2]$.

Q28. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X=n]\right) = \dfrac{4(n+1)}{3^{n+2}}$.

Q29. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=n]\right) = 1$.

Q30. Montrer que X admet une espérance finie et calculer $\mathbb{E}\left(X\right)$.

Partie C - Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième « Pile », puis en fonction du nombre n de « Face » obtenu, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin, on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de « Face » obtenus avant le deuxième « Pile », et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

Q31. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Q32. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, en distinguant les cas $k<n$ et $k>n$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=n]}\left([U=k]\right)$.

Q33. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}\left([U=k]\right) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}\left([X=n]\right)$

puis que : $\mathbb{P}\left([U=k]\right) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

Q34. Montrer que U admet une espérance et calculer $\mathbb{E}\left(U\right)$.

Q35. Montrer que U admet une variance et calculer $\mathbb{V}(U)$.

Problème n° 4

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, $\ldots$, deux boules portant le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boule précédemment obtenue.

Q36. Quelle relation lie X_n à Y_1, $Y_2, \ldots,$ Y_n.

Q37. Déterminer la loi de Y_1, et plus généralement celle de Y_i pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Donner alors $\mathbb{E}(Y_i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Q38. Montrer que X_n admet une espérance et la calculer.

Q39. Dans le cas $n=1$ puis $n=2$, détermnier la loi de X.

Q40. On suppose dans cette question que $n=3$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

Q41. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

Q42. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide des termes de la suite $(h_k)_{k \geq 1}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.