À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Problème n° 1

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on définit la suite $(V_n)_{n\geq 2}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\, V_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$

On se propose dans cet exercice d'étudier la nature des deux séries $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$ où $(u_n)_{n\geq 2}$ est la suite de terme général donné par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\, u_n = \mathrm{e}^{V_n}$.

Partie A - Étude du terme géneral de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Montrer que lorsque x est au voisinage de 0, on a : $\ln\left(2-\mathrm{e}^{x}\right) = -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Éléments de correction

Puisque $\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\ln\left(2-\mathrm{e}^{x}\right) &= \ln\left(2-\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\right)\\ &= \ln\left(1-\left(x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\right)\end{aligned}$$

On a bien que $\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et par composition avec le $DL_2\,(0)$ de $x \longmapsto \ln(1-x)$, il vient :

$$\begin{aligned}\ln\left(2-\mathrm{e}^{x}\right) &= -\left(x+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= -x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Q2. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in \left]0;1\right[$.

Éléments de correction

Soit $k \geq 2$. Par passage à l'inverse, on a $\dfrac{1}{k}$ appartient alors à l'intervalle $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, et par composition par la fonction exponentielle, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ appartient à $\left]1,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$.

Par suite, $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \in \left[2-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}},1\right[$.

De plus, $\mathrm{e} < 4$ donc $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} < 2$ et ainsi $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > 0$.
Alors $2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$ est bien dans l'intervalle $]0,1[$.

Q3. En déduire le signe de $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ pour tout entier $k \geq 2$.

Éléments de correction

On sait que : $\forall x \in]0,1[,\ \ln(x) < 0$.
Il vient alors que : pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ est strictement négatif.

Q4. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$?

Éléments de correction

On commence par remarquer que les deux séries $\sum \ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ et $\sum -\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right)$ sont de même nature.

Puisque $\ln(2-\mathrm{e}^{x}) = -x-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$, on a $\ln(2-\mathrm{e}^{x}) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ et comme $\frac{1}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a alors $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{k}$.

Puisque :

- $-\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k} \geq 0$;
- la série de terme général $\frac{1}{k}$ est une série de Riemann divergente.

d'aprèès le théorème d'équivalence sur les séries à termes positifs donne que la série de terme général $-\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ diverge.

Par suite, il en est de même pour la série $\sum \ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$.

Q5. Déterminer si elles existent, les limites des suites $(V_n)_{n\geq 2}$ et $(u_n)_{n\geq 2}$.

Éléments de correction

La série $\sum -\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}})$ est une série à termes positifs et divergente donc par théorème la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Par conséquent $-V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc $V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et par suite par composition $u_n = \mathrm{e}^{V_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie B - Étude de la convergence de la série $\sum u_n$

Q6. Montrer que : $\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)$

Éléments de correction

Soit $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}\left[\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)\right] &= V_n - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= V_n - \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k-1) - \ln(k)\right) \\
&= V_n - \left(\ln 1 - \ln n\right) \\
&= V_n + \ln n = \ln\left(\mathrm{e}^{V_n}\right) + \ln(n) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^{V_n}\, n\right) = \ln(n\, u_n)
\end{aligned}$$

Q7. Déterminer un équivalent quand k tend vers $+\infty$ de $\ln\left(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Éléments de correction

D'après les questions précédentes : $\ln(2-\mathrm{e}^{x}) = -x-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ et $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}
\ln(2-\mathrm{e}^{x}) - \ln(1-x) &= -x-x^2-\left(-x-\frac{x^2}{2}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a : $\ln(2-\mathrm{e}^{x}) - \ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et finalement que : $\ln(2-\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2\,k^2}$

Q8. En déduire que u_n est équivalent quand n tend vers $+\infty$, à $\dfrac{K}{n}$ où K est un réel strictement positif.

Quelle est alors la nature de la série de terme général u_n ?

Éléments de correction

On définit alors la suite $(w_n)_{n\geq 2}$ par : $\forall k \geq 2,\ w_k = \ln(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.

D'après ce qui précède :

- $-w_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,k^2}$;
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2\,k^2} \geq 0$;
- la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est une série de Riemann.
- les séries $\sum \dfrac{1}{k^2}$ et $\sum -\dfrac{1}{2k^2}$ sont de même nature

Ainsi, d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum w_n$ est convergente.

Par définition de la convergence d'une série, sa suite des sommes partielles qui est la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k$ converge vers un réel L.

Puisque $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} w_k = \ln(nu_n)$, on en déduit que $\ln(nu_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$, et par composition avec la fonction exponentielle, il vient que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{L}$ et comme $\mathrm{e}^{L} \neq 0$, on en déduit que $nu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{L}$, ce qui donne que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{L}}{n}$ avec $\mathrm{e}^{L} > 0$.

Par conséquent, on a :

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{K}{n}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{K}{n} \geq 0$;
- la série de terme général $\dfrac{K}{n}$ diverge.

donc d'après le théorème d' 'equivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Partie C - Étude de la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}(-1)^k u_k$.

Q9. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

Éléments de correction

D'après les questions précédentes, on a : $\forall n \geq 2,\ V_{n+1} - V_n = \ln\left(2 - \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}\right) < 0$

La suite $(V_n)_{n\geq 2}$ est donc strictement décroissante.

Par composition avec la fonction exponentielle, elle même croissante,la suite $\left(\mathrm{e}^{V_n}\right)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et par conséquent la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

Q10. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont deux suites adjacentes.

Éléments de correction

Par décroissance de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ $
$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1}u_{2n+1} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} \\ &= -u_{2n+1} + u_{2n+2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

et de même : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\begin{aligned}[t] S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+3} u_{2n+3} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3} \\ &> 0 \end{aligned}$

Ainsi la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est décroissante et la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ est croissante.

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n} &= (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= -u_{2n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{K}{2n+1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont bien adjacentes.

Q11. En déduire la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Éléments de correction

Les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont alors convergentes et ont même limite. Ce qui permet de dire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Par conséquent la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n u_n$ étant convergente, par définition la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

Problème nº 2

On considère la matrice M définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement « on obtient une boule blanche (respectivement rouge) lors du i^{e} tirage ».

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du n^{e} tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche, et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ permettant de modéliser cette expérience, et que X_n, T_1 et T_2 sont des variables aléatoires définies sur cet espace.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partie A - Recherche de la loi de X_n

Q12. Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.
On distinguera les trois cas $n = 0$, $n = 1$ et $n \geq 2$.

Éléments de correction

- X_0 est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'instant 0, c'est à dire 2. Ainsi $X_0(\Omega) = \{2\}$.
- X_1 est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le premier tirage. Il en reste donc seulement une au minimum si l'on en a tiré une ou deux si c'est la rouge qui a été tirée, et ainsi $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$.
- X_n, pour $n \geq 2$, est la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne après le n^{e}

tirage. Le nombre de boules blanches à l'issue du n^e tirage dépend clairement du nombre de boules blanches présentes à l'issue du $(n-1)^e$ tirage. Ainsi, avant le n^e tirage, l'urne contient soit 0, soit 1, soit 2 boules blanches. Par conséquent si l'on tire une rouge, il en restera encore 2, et si on tire une blanche, il en restera soit 0 soit 1. En conclusion $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Q13. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, U_{n+1} = MU_n$.
Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Éléments de correction

On a $MU_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 0]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \frac{1}{2}pX_n = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix}$

- L'événement $[X_{n+1} = 0]$ ne peut se produire que si $[X_n = 0]$ ou $[X_n = 1]$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) &= \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap [X_n = 0]) + \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap \mathbb{P}([X_n = 1])) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \times \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}([X_n = 1])\, \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 0]) \times 1 + \mathbb{P}([X_n = 1]) \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et on retrouve la première ligne du produit MU_n.

- L'événement $[X_{n+1} = 1]$ ne peut se produire que si $[X_n = 1]$ ou $[X_n = 2]$, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap [X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap \mathbb{P}([X_n = 2])) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}([X_n = 2])\, \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 1]) \times \frac{1}{2} + \mathbb{P}([X_n = 2]) \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et on retrouve la deuxième ligne du produit MU_n.

- L'événement $[X_{n+1} = 2]$ ne peut se produire que si $[X_n = 2]$ est réalisé, et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \mathbb{P}([X_{n+1}] \cap [X_n = 2]) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 2]) \times \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}([X_n = 2]) \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et on retrouve la dernière ligne du produit MU_n.

Par suite, on a bien $U_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) \\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) \end{pmatrix} = MU_n$, et cette égalité reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ compte-tenu du fait que $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ qui permet bien d'avoir $U_1 = MU_0$ et que $U_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ qui donne alors $MU_1 = U_2$, le tout en raisonnant comme précédemment.

Q14. Calculer MV_1, MV_2 et MV_3.

Éléments de correction

Des calculs directs donnent que : $MV_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $MV_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $MV_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Q15. En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante : $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'assertion $\mathcal{P}(n)$: « $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$ ». Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation Pour $n = 0$, on a :
$$U_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_0 = 0]) \\ \mathbb{P}([X_0 = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et un calcul direct donne que :
$$V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_0$$

d'où la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. Suppons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $U_{n+1} = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3$.

D'après ce qui précède :
$$\begin{aligned} U_{n+1} &= MU_n \\ &\underset{\substack{\text{Hypothèse} \\ \text{de récurrence}}}{=} M\left(V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3\right) \\ &= MV_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n MV_2 + \left(\frac{1}{3}^n\right) MV_3 \end{aligned}$$

Or $MV_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}V_2$ et $MV_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}V_3$, et par suite on en déduit que :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= V_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{2}V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}V_3 \\ &= V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3 \end{aligned}$$

d'où la propriété $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}(0)$ étant vraie, et la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant héréditaire, elle est donc vrai pour tout entier n.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3$.

Q16. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.

Éléments de correction

Par définition de la suite de matrices colonnes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit donc que :
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{3^{n-1}} \\ \mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{4}{3^n} \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1}{3^n} \end{array}\right.$$
qui donne la loi de X.

Q17. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

X_n étant une variable aléatoire à support fini, elle admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= 0\times\mathbb{P}([X_n=0])+1\times\mathbb{P}([X_n=1])+2\times\mathbb{P}([X_n=2])\\ &= \frac{1}{2^{n-2}}-\frac{4}{3^n}+2\times\frac{2}{3^n}\\ &= \frac{1}{2^{n-2}}-2\frac{2}{3^n}\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ puisque $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ et $\left|\frac{1}{3}\right|<1$.

Loi de T_1 et de T_2

Q18. Reconnaître la loi de T_1.

Éléments de correction

La variable aléatoire T_1 est égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche. La première boule blanche n'apparaîtra qu'après une succession ininterrompue de tirage de la boule rouge. Ainsi, $T_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$ est T_1 suit la loi géométrique de paramètre $\frac{2}{3}$.

Q19. Écrire les événements $[T_2=2]$ et $[T_2=3]$ à l'aide de certains des événements B_i.

En déduire alors les valeurs des probabilités $\mathbb{P}([T_2=2])$ et $\mathbb{P}([T_2=3])$.

Éléments de correction

$[T_2=2]$ est l'événement la dernière boule blanche a été tirée lors du 2e tirage.
Ainsi, $[T_2=2]=B_1\cap B_2$.
$[T_2=3]$ est l'événement la dernière boule blanche a été extraite de lors à l'issue du 3etirage.
Ainsi $[T_2=3]=\left(\overline{B_1}\cap B_2\cap B_3\right)\cup\left(B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3\right)$.

Par suite : $$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_2=2]) &= \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

et d'après la formule des probabilités composées : $$\begin{aligned}\mathbb{P}([T_2=3]) &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Q20. Pour tout entier $n\geq 2$, écrire l'événement $[T_2=n]$ en fonction des événements $[X_{n-1}=1]$ et $[X_n=0]$.

Éléments de correction

Soit $n\geq 2$. On a $[T_2=n]=[X_{n-1}=1]\cap[X_n=0]$ puisque pour extraire la dernière boule blanche au ne tirage, l'urne ne doit contenir qu'une seule boule blanche à l'issue du $(n-1)$e tirage, et bien évidemment aucune à l'issue du ne.

Q21. En déduire que pour tout entier $n\geq 2$, on a : $$\mathbb{P}([T_2=n])=2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

Éléments de correction

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T_2 = n]) &= \mathbb{P}([X_{n-1} = 0] \cap [X_n = 0]) \\
&= \mathbb{P}([X_{n-1} = 1]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n = 0) \\
&= \left(\frac{1}{2^{n-3}} - \frac{4}{3^{n-1}}\right) \times \frac{1}{2} \\
&= 2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Q22. Montrer alors que T_2 admet une espérance, et la calculer.

Éléments de correction

T_2 étant une variable aléatoire discrète, elle admet une espérance si, et seulement si, la série numérique $\sum n \times \mathbb{P}([T_2 = n])$ est absolument converge, ce qui revient ici à montrer qu'elle est convergente car à termes positifs par construction.

Les deux séries numériques $\sum n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $\sum n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ sont deux séries géométriques dérivées telles que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, donc par théorème convergentes.

Par suite le terme général de la série $\sum n \times \mathbb{P}([T_2 = n])$ étant la somme des termes généraux de deux séries convergentes, la série $\sum n \times \mathbb{P}([T_2 = n])$ est convergente, et on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_2) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 2n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= 2\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1\right) - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1\right) \\
&= 2 \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 2 - 2\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + 2 \\
&= \frac{2}{\frac{1}{4}} - \frac{2}{\frac{4}{9}} \\
&= 8 - \frac{9}{2} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Problème n° 3

Partie A - Préliminaire technique

Q23. Montrer que pour tout $x \in]-1;1[$, la série numérique $\sum nx^n$ est une série convergente.

Éléments de correction

Pour $x \in]-1;1[$ fixé, les séries $\sum nx^n$ et $\sum nx^{n-1}$ sont de même nature.

Comme $\sum nx^{n-1}$ est une série géométrique dérivée, par théorème, elle est convergente, ce qui assure la convergence de la série $\sum nx^n$.

Q24. Montrer que : $\forall x \in]-1;1[\,,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Éléments de correction

Puisque $x \in]-1;1[$, on sait que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\ &= x \times \frac{1}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

Q25. On admet que pour tout $x \in]-1;1[$, la série numérique $\sum n^2 x^n$ est une série convergente.

Montrer que : $\forall x \in]-1;1[\,,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

Éléments de correction

Le cas où $x = 0$ est trivial.
On peut remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 = n(n-1) + n$.
La série $\sum n(n-1)x^{n-2}$ étant une série géométrique dérivée avec $|x| < 1$, elle est convergente, et comme les deux séries $\sum n(n-1)x^n$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ sont de même nature, il vient que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1) + n\right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \\ &= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= x^2 \times \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x(1-x)}{(1-x)^3} \\ &= \frac{2x^2 + x - x^2}{(1-x)^3} \\ &= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3} \\ &= \frac{x\,(1+x)}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Partie B - Étude d'une première variable aléatoire

On dispose d'une pièce de monnaie amenant « Pile » avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et « Face » avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.
On effectue une succession de lancers indépendants avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de « Face » obtenus avant l'obtention du deuxième « Pile ».
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k les événements « obtenir « Pile » au k^{e} lancer » et on note $F_k = \overline{P_k}$.

Q26. Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$ à l'aide des événements P_k et F_k.

Éléments de correction

Il est immédiat que $[X=0]=P_1\cap P_2$, $[X=1]=(P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap P_3)$ et $[X=2]=(P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)$.

Q27. Calculer les probabilités des événements $[X=0]$, $[X=1]$ et $[X=2]$.

Éléments de correction

Par indépendance des lancers, on a directement que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=0]) &= \mathbb{P}(P_1\cap P_2)\\ &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$
La réunion $(P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap P_3)$ étant disjointe puis par indépendance des lancers, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}((P_1\cap F_2\cap P_3)\cup(F_1\cap P_2\cap P_3))\\ &= \mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap P_3)+\mathbb{P}(F_1\cap P_2\cap P_3)\\ &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\mathbb{P}(P_3)+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\mathbb{P}(P_3)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \frac{8}{27}\end{aligned}$$
La réunion $(P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)$ étant disjointe puis par indépendance des lancers, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}((P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)\cup(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4))\\ &= \mathbb{P}(P_1\cap F_2\cap F_3\cap P_4)+\mathbb{P}(F_1\cap P_2\cap F_3\cap P_4)+\mathbb{P}(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)\\ &= \mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\mathbb{P}(F_3)\times\mathbb{P}(P_4)+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(P_2)\times\mathbb{P}(F_3)\times\mathbb{P}(P_4)\\ &\quad+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(F_2)\times\mathbb{P}(P_3)\times\mathbb{P}(P_4)\\ &= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\\ &= \frac{4}{27}\end{aligned}$$

Q28. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=n])=\dfrac{4(n+1)}{3^{n+2}}$.

Éléments de correction

Soit $n\in\mathbb{N}$. L'événement $[X=n]$ est réalisé uniquement lorsque l'on obtient un « Pile » et n « Face » lors des $n+1$ premiers lancers, puis un second pile au $(n+2)^{e}$lancer.
Par conséquent :

$$[X=n]=(P_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{n+1}\cap P_{n+2})\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\ldots\cap F_{n+1}\cap P_{n+2})\cup\ldots\cup(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n\cap P_{n+1}\cap P_{n+2})$$

Cette réunion est clairement disjointes est est formée de $n+1$ événements qui par indépendances des lancers, sont tous de même probabilité égal à $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\times\left(\dfrac{2}{3}\right)$, ce qui amène à $\mathbb{P}([X=n])=\dfrac{4(n+1)}{3^{n+2}}$.

Q29. Vérifier que l'on a bien $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=n])=1$.

Éléments de correction

Il est immédiat que : $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=n])=\dfrac{4}{9}\left(n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.

Par suite, puisque les deux séries $\sum n\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ et $\sum\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ convergent puisque $\dfrac{1}{3}\in\,]-1;1[$, on en déduit que

$\sum \mathbb{P}([X=n])$ est une série convergente, comme somme de deux séries convergentes. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) &= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Q30. Montrer que X admet une espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.

Éléments de correction

X étant un variable aléatoire discrète, elle admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum n\mathbb{P}([X=n])$ est absolument convergente, ce qui ici revient à s'assurer de sa convergence car à termes positifs.

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \times \mathbb{P}([X=n]) = \frac{4}{9}\left(n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n + n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

D'après ce qui précède, puisque $\frac{1}{3} \in]-1;1[$, les séries $\sum n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\sum n\left(\frac{1}{3}\right)^n$ sont convergentes, et par conséquent, par somme de deux séries convergentes, $\sum n \times \mathbb{P}([X=n])$ est convergente, et par suite X admet une espérance.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} n \times \mathbb{P}([X=n]) &= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &\underset{\frac{1}{3}\in]-1;1[}{=} \frac{4}{9}\left(\frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Partie C - Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième « Pile », puis en fonction du nombre n de « Face » obtenu, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin, on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de « Face » obtenus avant le deuxième « Pile », et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue.

Q31. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

Éléments de correction

On a $U(\Omega) = \mathbb{N}$ puisque X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et que U prend ses valeurs ensuite dans $[\![0;X]\!]$.

Q32. Pour tout $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, en distinguant les cas $k<n$ et $k>n$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=n]}([U=k])$.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sous l'hypothèse $[X=n]$ est réalisé, U prend ses valeurs dans $[\![0;n]\!]$ suivant une loi uniforme, ce qui donne :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}_{[X=n]}([U=k]) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si} \quad k \leq n \\ 0 & \text{si} \quad k > n \end{cases}$$

Q33. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([U=k]) = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}([X=n])$

puis que : $\mathbb{P}([U=k]) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$.

Éléments de correction

Soit $k \in \mathbb{N}$. La famille $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([U=k]) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}_{[X=n]}([U=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}_{[X=n]}([U=k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \mathbb{P}([X=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{2}{3^{k+1}}
\end{aligned}$$

Q34. Montrer que U admet une espérance et calculer $\mathbb{E}(U)$.

Éléments de correction

Comme précédemment, U admet une espérance si, et seulement si la série $\displaystyle\sum_k k\mathbb{P}([U=k])$ est absolument convergente, et donc ici convergente, dont la nature est exactement celle de $\displaystyle\sum k\left(\frac{1}{3}\right)^k$ qui converge d'après ce qui précède puisque $\dfrac{1}{3} \in]-1;1[$. Donc U admet une espérance.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \mathbb{P}([U=k]) \\
&= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Q35. Montrer que U admet une variance et calculer $\mathbb{V}(U)$.

Éléments de correction

Par définition U admet une variance lorsque U^2 admet une espérance.
D'après le théorème du transfert, U^2 admet une espérance lorsque la série numérique $\sum k^2 \times \mathbb{P}([U=k])$ est absolument convergente, et donc ici convergente car à termes positifs.
Or $\sum k^2 \times \mathbb{P}([U=k])$ et $\sum k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k$ sont de même nature, la deuxième étant convergente d'après ce qui précède puisque $\frac{1}{3} \in]-1;1[$.

Par suite, on en dédit que :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(U^2\right) &= \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Par suite, d'après la formule de Huygens, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(U) &= \mathbb{E}\left(U^2\right) - \left(\mathbb{E}\left(U\right)\right)^2 \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Problème no 4

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, $\dots$, deux boules portant le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :
- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une ie paire de boules portant le même numéro à partir d'une $(i-1)$e paire de boule précédemment obtenue.

Q36. Quelle relation lie X_n à $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$.

Éléments de correction

Il est clair que $X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Q37. Déterminer la loi de Y_1, et plus généralement celle de Y_i pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Donner alors $\mathbb{E}\left(Y_i\right)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.

Éléments de correction

Loi de Y_1 : du fait que, lorsque l'on tire une paire de boules de numéros différents ces dernières sont remises dans l'urne, tant que l'on n'a pas obtenu une paire de même numéro, l'urne est toujours dans le même état. Ainsi, la variable aléatoire Y_1 correspond au temps d'attente d'apparition de la première paire de boule de même numéro et suivra donc une loi géométrique de paramètre p, ce dernier étant bien constant d'après la remarque faite. La probabilité de tirer une paire de boules portant le même numéro est alors $\frac{\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{1}{2n-1} = p$ puisqu'il y a

$\binom{n}{1}$ façons de choisir le numéro de la paire de boules à extraire et $\binom{2n}{2}$ façon d'extraire une paire de boules de l'urne. Par conséquent $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-1}\right)$.

Loi de Y_i pour $i \in [\![1;n]\!]$: Sur le même principe, dès lors qu'une paire de boule de même numéro a été extraite de l'urne, tant que l'on n'en retire pas une nouvelle, l'urne reste dans le même état. Ainsi, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, Y_i suit une loi géométrique de paramètre $p_i = \dfrac{n-i+1}{\binom{2(n-i+1)}{2}} = \dfrac{1}{2n-2i+1}$ où p_i est la probabilité d'obtenir une nouvelle paire de boules portant le même numéro quand $i-1$ paires de boules portant le même numéro ont été extraites. Ainsi $Y_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2n-2i+1}\right)$.

On en déduit alors que pour tout tout $i \in [\![1;n]\!]$, Y_i admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}(Y_i) = 2n - 2i + 1$

Q38. Montrer que X_n admet une espérance et la calculer.

Éléments de correction

Puisque $X_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ et que les Y_i admettent toutes une espérance, par linéarité de l'espérance, X_n admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2n-2i+1) \\
&= (2n+1)\sum_{i=1}^{n} 1 - 2\sum_{i=1}^{n} i \\
&= (2n+1)\times n - 2\frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2n^2 + n - n^2 - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

Q39. Dans le cas $n = 1$ puis $n = 2$, détermnier la loi de X.

Éléments de correction

Si $n = 1$: X_1 est la variable aléatoire certaine égale à 1.

Si $n = 2$: l'urne contient donc deux paires de boules de même numéro. X_2 est égale au temps d'attente de la première paire de boules portant le même numéro, donc $X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$ (voir explication pour Y_1).

Q40. On suppose dans cette question que $n = 3$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \mathbb{P}([X_3 = k]) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

Éléments de correction

Si $n = 3$, alors Y_3 est la variable aléatoire certaine égale à 1 et donc $X_3 = Y_1 + Y_2 + 1$.

Soit $k \geq 3$. On considère le système complet d'événements $([Y_1 = 1])_{i\in\mathbb{N}^*}$ pour écrire que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3 = k]) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_3 = k] \cap [Y_1 = k]) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1 = i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = k-i-1)\,\mathbb{P}(Y_1 = i)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}_{[Y_1=1]}(Y_2 = k-i-1) = \mathbb{P}(Y_2 = k-i-1)$ car les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes. En effet, intuitivement, le « temps mis pour extraire la première paire de boules de même numéro » n'a pas d'incidence sur le « temps mis pour extraire la deuxième paire de boules de même numéro ». Par suite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3 = k]) &= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-2} \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \quad = \quad \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} \sum_{i=1}^{k-2}\left(\frac{6}{5}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{15}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-3} \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - 1}{\frac{1}{5}} \quad = \quad \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)\end{aligned}$$

Q41. Montrer que $\mathbb{P}([X_n = n]) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

Éléments de correction

$[X_n = n]$ est l'événement « à chaque tirageon obtient une paire de boules portant le même numéro », c'est à dire que, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $Y_i = 1$. Ainsi $[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^{n} [Y_i = 1]$. En utilisant l'indépendance de ces événements, $\mathbb{P}([X_n = n]) = \prod_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2n - 2i + 1} = \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

Q42. Exprimer $\mathbb{P}([X_n = n+1])$ à l'aide des termes de la suite $(h_k)_{k\geq 1}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{1}{i}$.

Éléments de correction

L'événement $[X_n = n+1]$ est l'événement « à tous les tirages on obtient une paire de boules portant le même numéro, sauf à un tirage qui n'est pas le dernier tirage ». Donc :

$$[X_n = n+1] = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left([Y_i = 2] \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} [Y_j = 1]\right)$$

Par incompatibilité et indépendance des événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = n+1]) &= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left([Y_i = 2] \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} [Y_j = 1]\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n-1}\left(\mathbb{P}(Y_i = 2)\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathbb{P}(Y_j = 1)\right) \\ &= p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \sum_{i=1}^{n} (1 - p_i) \quad = \quad \frac{2^n n}{(2n)!}\left(n - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\right) \\ &= \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\right) \quad = \quad \frac{2^n n!}{(2n)!}\left(n - h_{2k} - \frac{1}{2} h_n\right)\end{aligned}$$