À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Calculatrice non autorisée

La parte técnica del examen

Dans cette partie, les questions qui suivent sont indépendantes.

Q1. Donner la forme algébrique du complexe $z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, puis en déduire[1] celle du complexe $z_2 = \dfrac{(1+\mathrm{i})^9}{(1-\mathrm{i})^7}$.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \times \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\ &= \frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2+1^2} \\ &= \frac{2\mathrm{i}}{2} \\ &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

Puis on a :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{(1+\mathrm{i})^9}{(1-\mathrm{i})^7} \\ &= \frac{(1+\mathrm{i})^7}{(1-\mathrm{i})^7} \times (1+\mathrm{i})^2 \\ &= \left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^7 \times (1+\mathrm{i})^2 \\ &= (\mathrm{i})^7 \times \left(1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2\right) \\ &= -\mathrm{i} \times 2\mathrm{i} \\ &= -2\mathrm{i}^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Q2. À l'aide de la formule du binôme de Newton, donner la forme algébrique du complexe $z_3 = (2-\mathrm{i})^4$.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned} (2-\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^k (-\mathrm{i})^{4-k} \\ &= \binom{4}{0} 2^0 (-\mathrm{i})^{4-0} + \binom{4}{1} 2^1 (-\mathrm{i})^{4-1} + \binom{4}{2} 2^2 (-\mathrm{i})^{4-2} + \binom{4}{3} 2^3 (-\mathrm{i})^{4-3} + \binom{4}{4} 2^4 (-\mathrm{i})^{4-4} \\ &= 1 \times \mathrm{i}^4 - 4 \times 2 \times \mathrm{i}^3 + 6 \times 4 \times \mathrm{i}^2 - 4 \times 8 \times \mathrm{i} + 1 \times 16 \times 1 \\ &= 1 + 8\mathrm{i} - 24 - 32\mathrm{i} + 16 \\ &= -7 - 24\mathrm{i} \end{aligned}$$

Q3. La famille $\mathcal{F} = ((2,3,-1,2),(-1,3,2,0),(0,-2,1,2),(1,4,2,4))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^4$? une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$? Justifier vos réponses.

1. Il est hors de question de calculer $(1+\mathrm{i})^9$ et $(1-\mathrm{i})^7$ à l'aide de la formule du binôme dans cette question. Donc on cherche une autre façon de mener le calcul demandé en manipulant les règles opératoires sur les puissances par exemple...

Éléments de correction

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$.

Par théorème, puisque $\mathcal{F}$ est une famille de 4 vecteurs, la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, le rang de la matrice A est égal à 4.

De même, par théorème, puisque $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, le rang de la matrice A est égal à 4.

On cherche alors le rang de la matrice A par échelonnement en lignes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{9}L_2}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{9} & \frac{22}{9} \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - \frac{22}{15}L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{9}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls, le rang de la matrice est donc 3, et par suite la famille $\mathcal{F}$ n'est ni libre ni génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Q4. Montrer que $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y-z+t=0 \text{ et } x-y-2z-t=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Éléments de correction

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$: par définition de F.

$\overrightarrow{0} = (0,0,0,0) \in F$: en effet, on a $0+0-0+0=0$ et $0-0-2\times 0-0=0$ ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $u=(x,y,z,t) \in F$, $v=(x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'',y'',z'',t'')$ et montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x''+y''-z''+t''=0$ et $x''-y''-2z''-t''=0$.

Par définition de w on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \\ t'' & = & \lambda t + t' \end{array}\right.$

On a alors :
$$\begin{aligned} x''+y''-z''+t'' &= \lambda x + x' + \lambda y + y' - (\lambda z + z') + \lambda t + t' \\ &= \lambda \underbrace{(x+y-z+)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x'+y'-z'+t'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et aussi :
$$\begin{aligned} x''-y''-2z''-t'' &= \lambda x + x' - (\lambda y + y') - 2(\lambda z + z') - (\lambda t + t') \\ &= \lambda \underbrace{(x-y-2z-t)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x'-y'-2z'-t'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par suite $w \in F$, ce qui donne que F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Q5. Déterminer deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^4$ tel que $F = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$ où F est défini à la question précédente.

Éléments de correction

On a directement que :

$$
\begin{aligned}
((x,y,z,t)\in F) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ x-y-2z-t &= 0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ -2y-z-2t &= 0 \end{cases} \\
&\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ y+\dfrac{1}{2}z+t &= 0 \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-\dfrac{3}{2}z &= 0 \\ y+\dfrac{1}{2}z+t &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{3}{2}z \\ y &= -\dfrac{1}{2}z-t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{3}{2}z \\ y &= -\dfrac{1}{2}z-t \\ z &= z \\ t &= t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left((x,y,z,t)\in \operatorname{Vect}\left(\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},1,0\right),(0,-1,0,1)\right)\right)
\end{aligned}
$$

et ainsi $F = \operatorname{Vect}\left(\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},1,0\right),(0,-1,0,1)\right)$.

Q6. Justifier que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Éléments de correction

Puisque $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, par théorème, M est inversible si, et seulement si $\operatorname{rg}(M) = 3$.
On recherche le rang de M par échelonnement en lignes de M, et en parallèle on effectue un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(M|\mathrm{I}_3)$ pour obtenir le cas échéant l'inverse de M.

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)
$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.
On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{2}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 5L_3}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)
\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{2}{5}L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3}}{\sim_L}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)
$$

L'inverse de la matrice M est ainsi : $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Problema número 1 | Caminar en espacios vectoriales

On se propose dans ce problème d'étudier deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
On considère les deux sous-ensembles F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-z=0 \text{ et } x-y-z=0\right\} \text{ et } F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\right\}$$

Manipuler les définitions de F_1 et F_2

Q7. Parmi les vecteurs $u_1 = (1,1,2)$, $u_2 = (1,1,1)$ et $u_3 = (2,0,2)$, lesquels appartiennent à F_1 ? et à F_2 ?

Éléments de correction

Pour u_1 : on a $1+2-3=0$ et $1-1-2=-2\neq 0$ donc $u_1 \notin F_1$.
De même, $1+1-2\times 2 = -2 \neq 0$ donc $u_1 \notin F_2$.

Pour u_2 : on a $1+1-1=0$ et $1-1-1=-1\neq 0$ donc $u_2 \notin F_1$.
Par contre, $1+1-2\times 1 = 0$ donc $u_2 \in F_2$.

Pour u_3 : on a $2+0-2=0$ et $2-0-2=0$ donc $u_3 \in F_1$.
Par contre $2-0-2\times 2=-2\neq 0$ donc $u_3 \notin F_2$.

Q8. Résoudre le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$.

Que peut-on en déduire pour F_1 et F_2 ?

Éléments de correction

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3. Or il s'agit d'un système carré homogène de taille 3×3, donc par théorème, il ne possède qu'une seule solution qui dans ce cas est la solution triviale $(0,0,0)$.
Ainsi, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de ce système est $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$.
Par ailleurs, on a :

$$\big(\,(x,y,z) \in F_1 \cap F_2\,\big) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-\ \ z=0 \\ x-y-\ \ z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x,y,z) \text{ est solution du système de} \\ \text{représentation matricielle } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array}\right)$$

On en déduit donc que le seul vecteur commun à F_1 et F_2 est le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$.

Structure vectorielle de F_1

Q9. Montrer que F_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

F_1 est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$: par définition de F_1.

$\overrightarrow{0} = (0,0,0)$ appartient à F_1 : en effet, on a $0+0-0=0$ et $0-0-0=0$ ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in F_1$.

Stabilité de F_1 par combinaison linéaire : soient $u=(x,y,z) \in F_1$, $v=(x',y',z') \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On pose $w = \lambda u + v$ avec $w = (x'', y'', z'')$ et montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x''+y''-z''=0$ et $x''-y''-z''=0$.

Par définition de w on a $\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & \lambda x + x' \\ y'' & = & \lambda y + y' \\ z'' & = & \lambda z + z' \end{array}\right.$

On a alors :
$$\begin{aligned} x''+y''-z'' &= \lambda x + x' + \lambda y + y' - (\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x+y-z)}_{=0 \text{ car } u \in F_1} + \underbrace{x'+y'-z'}_{=0 \text{ car } v \in F_2} \\ &= \lambda 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et aussi :
$$\begin{aligned} x''-y''-z'' &= \lambda x + x' - (\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x-y-z)}_{=0 \text{ car } u \in F_1} + \underbrace{x'-y'-z'}_{=0 \text{ car } v \in F_1} \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $w \in F$ et par suite F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion : F_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q10. Montrer alors que F_1 est une droite vectorielle[2] de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned} ((x,y,z) \in F_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+\ \ y-z=0 \\ \ \ -2y \qquad =0 \end{cases} \\ &\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y-z=0 \\ \quad y \qquad =0 \end{cases} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \quad -z=0 \\ y \qquad =0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad = z \\ \ y \quad = 0 \\ \quad z = z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \left((x,y,z) \in \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right) \right) \end{aligned}$$

et ainsi $F_1 = \operatorname{Vect}\left((1,0,1)\right)$.

Recherche de familles génératrices de F_2

On admet que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Q11. Montrer que F_2 est un plan vectoriel[3] de $\mathbb{R}^3$.

2. Pour ceux qui ne se souviendraient pas... il s'agit de montrer que $F_1 = \operatorname{Vect}(v_1)$ avec $v_1 \in \mathbb{R}^3$.
3. Pour ceux qui ne se souviendraient pas... il s'agit de montrer que $F_2 = \operatorname{Vect}(v_2, v_3)$ avec $v_2 \in \mathbb{R}^3$ et $v_3 \in \mathbb{R}^3$ mais v_2 et v_3 non colinéaires.

CC BY NC ND

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned} (\,(x,y,z)\in F_2\,) &\Leftrightarrow \left\{x+y-2z=0\right. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y+2z \\ \quad y &= y \\ \quad\; z &= z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (\,(x,y,z)\in \mathrm{Vect}\,((-1,1,0)\,,(2,0,1))\,) \end{aligned}$$

et donc $F_2 = \mathrm{Vect}\,((-1,1,0)\,,(2,0,1))$.

Q12. Montrer que l'on a aussi $F_2 = \mathrm{Vect}\,((2,0,1)\,,(4,-2,1))$.

Éléments de correction

On commence par remarquer que $4+(-2)-2\times 1 = 0$ et donc que $(4,-2,1)\in F_2$.
Par ailleurs, il est immédiat que $(4,-2,1) = -2\,(-1,0,1)+(2,0,1)$.
On a donc : $\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,((2,0,1)\,,(4,-2,1)) &= \mathrm{Vect}\,((2,0,1)\,,(2,0,1)\,,(-1,0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}\,((2,0,1)\,,(-1,0,1)) \end{aligned}$
ce qui donne bien que $F_2 = \mathrm{Vect}\,((2,0,1)\,,(4,-2,1))$.

Une autre décomposition des vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Q13. Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,0,1)\,,(-1,1,0)\,,(2,0,1))$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de correction

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de la famille $\mathcal{F}$.
La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de 3 vecteurs, par théorème, elle sera libre si, et seulement si, le rang de la matrice A est égal à 3.
La famille $\mathcal{F}$ étant une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, par théorème, elle sera libre si, et seulement si, le rang de la matrice A est égal à 3.
On procède à un échelonnement en lignes de la matrice A pour en chercher le rang :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls, et le rang de la matrice est donc 3. Ainsi la famille $\mathcal{F}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Q14. Soit $u = (a,b,c)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.
Justifier qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha\,(1,0,1)+\beta\,(-1,1,0)+\gamma\,(2,0,1)$.

Éléments de correction

Puisque la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$, on sait que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ se décompose comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$. D'où il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha\,(1,0,1)+\beta\,(-1,1,0)+\gamma\,(2,0,1)$.

Q15. Déduire de ce qui précède que le vecteur $w = (1,-1,2)$ s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de F et expliciter cette combinaison linéaire.

Éléments de correction

D'après la question précédente, il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(1,-1,2)=\alpha\,(1,0,1)+\beta\,(-1,1,0)+\gamma\,(2,0,1)$.

Le triplet (α,β,γ) est alors solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$.

On résout ce dernier par échelonnement réduit en lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \underset{L_3\leftarrow L_3-1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow -L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1-2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$
$$\underset{L_1\leftarrow L_1+1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)$$

On en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& 4\\ \beta &=& -1\\ \gamma &=& -2\end{array}\right.$

et ainsi $w=4\,(1,0,1)-(-1,1,0)-2\,(2,0,1)$.

Problema número 2 | Una familia especial de matrices

L'objet de ce problème est d'étudier les matrices $M(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}$ où a est un réel quelconque.

Quelques matrices $M(a)$ particulières

Q16. Montrer que la matrice $M\left(\dfrac{1}{3}\right)$ n'est pas inversible.

Éléments de correction

Tout d'abord, on a $M\left(\dfrac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Puisque $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, par théorème, M est inversible si, et seulement si $\operatorname{rg}(M)=3$.

On recherche le rang de M par échelonnement en lignes qui donne directement $\operatorname{rg}(M)=1$ puisque :

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et ainsi M n'est pas inversible.

Q17. Pour tout $a\in\mathbb{R}$, montrer que $(M(a))^2=M(2a-3a^2)$.

CC BY NC ND

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}(M(a))^2 &= \begin{pmatrix} 6a^2-4a+1 & 2a-3a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 6a^2-4a+1 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 2a-3a^2 & 6a^2-4a+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2\left(2a-3a^2\right) & 2a-3a^2 & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 1-2\left(2a-3a^2\right) & 2a-3a^2 \\ 2a-3a^2 & 2a-3a^2 & 1-2\left(2a-3a^2\right) \end{pmatrix} \\ &= M\left(2a-3a^2\right)\end{aligned}$$

Q18. Déterminer le(s) réel(s) a tels que $(M(a))^2 = M(a)$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a :
$$\begin{aligned}\left((M(a))^2 = M(a)\right) &\Leftrightarrow \left(M\left(2a-3a^2\right) = M(a)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(2a-3a^2 = a\right) \\ &\Leftrightarrow \left(a(1-3a) = 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(a \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}\right)\end{aligned}$$

Caractérisation de l'inversibilité des matrices $M(a)$

Dans cette partie uniquement, on suppose que $a \neq \dfrac{1}{3}$, et on admettra le résultat suivant :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M(a) \times M(b) = M(a+b-3ab)$$

Q19. On considère $F = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a+b-3ab = 0\right\}$.
Montrer que $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ appartiennent à F mais que ce n'est pas le cas de $\left(1, \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$.

Éléments de correction

On a clairement que $1 + \dfrac{1}{2} - 3 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 0$ et $\dfrac{1}{2} + 1 - 3 \times \dfrac{1}{2} \times 1 = 0$ ce qui assure que $\left(1, \dfrac{1}{2}\right) \in F$ et $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \in F$.
Par contre, on a $\left(1, \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ et $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} - 3 \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4} \neq 0$ et donc $\left(1, \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2}, 1\right) \notin F$.

Q20. F est-il[4] un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Éléments de correction

F ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, puisque si c'était le cas, il devrait être stable par combinaison linéaire, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente, où la somme de deux élélements de F n'appartient pas à F.

Q21. Que dire de $M(a)$ et $M(b)$ lorsque $(a,b) \in F$?

Éléments de correction

Si $(a,b) \in F$, on a que $M(a) \times M(b) = M(0)$ avec $M(0) = \mathrm{I}_3$.
Par suite, $M(a)$ est inversible à droite et donc inversible, d'inverse $M(b)$. De même $M(b)$ est inversible à gauche et donc inversible, d'inverse $M(a)$.
En conclusion $M(a)$ et $M(b)$ sont inversibles et on a $(M(a))^{-1} = M(b)$ et $(M(b))^{-1} = M(a)$.

Q22. Montrer que $M(a)$ est inversible[5] et donner son inverse en fonction de a.

4. Non, non, non... on ne va pas chercher à montrer que c'est un sous-espace vectoriel, mais exploiter la question précédente de façon pertinente pour répondre à cette question.
5. Il s'agit de fabriquer à l'aide de a le « bon b » pour appliquer le résultat de la question précédente.

Éléments de correction

En posant $b = -\dfrac{a}{1-3a}$, on a clairement que $a + b - 3ab = 0$ et donc que $(a,b) = \left(a, -\dfrac{a}{1-3a}\right) \in F$ et donc que $M(a)$ est inversible d'après la question précédente, et son inverse est $M\left(-\dfrac{a}{1-3a}\right)$.

Calcul des puissances de $M(a)$

Dans cette partie, on définit les matrices P et Q par $P = M\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $Q = \mathrm{I}_3 - P$.

Q23. Montrer qu'il existe un réel α que l'on exprimera en fonction de a tel que : $M(a) = P + \alpha Q$.

Éléments de correction

On a déjà vu que $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors :
$$\begin{aligned} M(a) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{I}_3 - 3aQ \\ &\underset{P+Q\mathrm{I}_3}{=} P + Q - 3aQ \\ &= P + (1-3a)\,Q \end{aligned}$$
et ainsi en posant $\alpha = 1 - 3a$, on trouve que $M(a) = P + \alpha Q$.

Q24. Calculer P^2, QP, PQ et Q^2.

Éléments de correction

On remarque tout d'abord que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Par suite, on a que :
$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= P \end{aligned}$$

On a alors :
$$\begin{aligned} Q^2 &= (\mathrm{I}_3 - P)(\mathrm{I}_3 - P) \\ &= \mathrm{I}_3^2 - \mathrm{I}_3 P - P\mathrm{I}_3 + P^2 \\ &= \mathrm{I}_3 - P - P + P \\ &= \mathrm{I}_3 - P \\ &= Q \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :
$$\begin{aligned} QP &= (\mathrm{I}_3 - P) \times P \\ &= \mathrm{I}_3 P - P^2 \\ &= P - P \\ &= (0) \end{aligned}$$

$$\text{et : } \begin{array}{rcl} PQ &=& P \times (\mathrm{I}_3 - P) \\ &=& P\mathrm{I}_3 - P^2 \\ &=& P - P \\ &=& (0) \end{array}$$

Q25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(M(a))^n = P + \alpha^n Q$.

Éléments de correction

D'après la question précédente, il est immédiat que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^k = P$ et $Q^k = Q$.
Puisque $PQ = QP$, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ (M(a))^n &=& (P + \alpha Q)^n \\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k \,(\alpha Q)^{n-k} \\ &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P^k Q^{n-k} \\ &=& \displaystyle\binom{n}{0} \alpha^n P^0 Q^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P^k Q^{n-k} + \binom{n}{n} \alpha^0 P^n Q^0 \\ &=& \displaystyle\alpha^n Q + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \underbrace{PQ}_{=(0)} + P \\ &=& \alpha^n Q + P \\ &=& P + \alpha^n Q \end{array}$$

Il est immédiat que $(M(a))^0 = \mathrm{I}_3$ et comme $P + \alpha^0 Q = \mathrm{I}_3$ le résultat est encore vrai pour $n = 0$, le cas $n = 1$ étant trivial.

Q26. Expliciter alors la matrice $(M(a))^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

$$\text{On a donc : } \begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\ (M(a))^n &=& P + \alpha^n Q \\ &=& \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{\alpha^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &=& \dfrac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha^n & -\alpha^n & -\alpha^n \\ -\alpha^n & 2\alpha^n & -\alpha^n \\ -\alpha^n & -\alpha^n & 2\alpha^n \end{pmatrix}\right) \\ &=& \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n \end{pmatrix} \end{array}$$

Problema número 3 | Un pequeño desvío en el mundo de los números complejos

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse aux propriétés des nombres complexes solutions des équations $(\star_3) : z^3 = 1$, $(\star_4) : z^4 = 1$ et plus généralement $(\star_n) : z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Un préliminaire technique

Q27. Montrer que : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y) + \mathrm{i}\,\sin(y)) = \cos(x+y) + \mathrm{i}\,\sin(x+y)$

CC BY NC ND

Éléments de correction

Un développement direct donne que pour tout$co, x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(\cos(x)+\mathrm{i}\,\sin(x))\,(\cos(y)+\mathrm{i}\,\sin(y)) &= \cos(x)\cos(y)+\mathrm{i}\,\cos(x)\sin(y)+\mathrm{i}\,\sin(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\ &= \cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)+\mathrm{i}\,(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y))\\ &= \cos(x+y)+\mathrm{i}\,\sin(x+y)\end{aligned}$$

Un complexe bien particulier

On désigne par j le complexe défini par $\mathrm{j} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Q28. Montrer que $\overline{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.

Éléments de correction

On a directement que :
$$\begin{aligned}\mathrm{j}^2 &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2+2\mathrm{i}\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(2\times\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

et aussi :
$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{j}} &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\times\left(-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\,\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\\ &= \mathrm{j}^2\end{aligned}$$

Q29. Que vaut $\mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}}$?

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}\mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}} &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

Q30. Vérifier que j et j^2 sont bien solutions de l'équation $(\star_3)$: $z^3 = 1$.
Après avoir desssiné un lapin en bas à gauche de votre deuxième page, donner les 3 complexes solutions de $(\star_3)$.

Éléments de correction

Par définition, j et j^2 sont solutions de $(\star_3)$ si, et seulement si $\mathrm{j}^3 = 1$ et $\left(\mathrm{j}^2\right)^3 = 1$.
On a alors :
$$\begin{aligned}\mathrm{j}^3 &= \mathrm{j}\times\mathrm{j}^2\\ &= \mathrm{j}\times\overline{\mathrm{j}}\\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^2\\ &= 1\end{aligned}$$

De même, on a : $$\begin{aligned}\left(\mathrm{j}^2\right)^3 &= \overline{\mathrm{j}}^3\\ &= \overline{\mathrm{j}^3}\\ &= \overline{1}\\ &= 1\end{aligned}$$
Ainsi, j et j^2 sont bien solutions de $(\star_3)$, étant ensuite immédiat que 1 est solution évidente de $(\star_3)$.

Q31. Montrer que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.

Éléments de correction

On a directement que : $$\begin{aligned}1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 &= 1+\mathrm{j}+\overline{\mathrm{j}}\\ &= 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 1+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ &= 0\end{aligned}.$$

Résolution de $(\star_4)$

Q32. À l'aide d'identités remarquables, déterminer quatre complexes a, b, c et d de sorte que :
$$\forall z\in\mathbb{C},\ z^4-1=(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)$$

Éléments de correction

On a directement que : $$\begin{aligned}\forall z\in\mathbb{C},\ z^4-1 &= \left(z^2\right)^2-(1)^2\\ &= \left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)\\ &= \left(z^2-1^2\right)\left(z^2-\mathrm{i}^2\right)\\ &= (z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})\end{aligned}$$
d'où la factorisation demandée.

Q33. Donner les quatre solutions complexes de $(\star_4)$ toutes exprimées sous forme d'une puissance de i.

Éléments de correction

On a donc : $$\begin{aligned}\left(z^4=1\right) &\Leftrightarrow \left(z^4-1=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left((z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=0\right)\\ &\Leftrightarrow \left((z-1=0)\ \text{ou}\ (z+1=0)\ \text{ou}\ (z-\mathrm{i}=0)\ \text{ou}\ (z+\mathrm{i}=0)\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z\in\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}\right)\\ &\Leftrightarrow \left(z\in\left\{\mathrm{i}^0,\mathrm{i}^1,\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3\right\}\right)\end{aligned}$$

Q34. On désigne par ω un des solutions de l'équation $(\star_4)$. Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\omega^k$?

Éléments de correction

Si $\omega=1$: on a alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\omega^k=4$.

Si $\omega \neq 1$ **:** on a alors que :
$$\sum_{k=0}^{3} \omega^k = \frac{1-\omega^4}{1-\omega} \underset{\substack{\omega \text{ solution de } (\star_4) \\ \text{donc on a : } \omega^4=1}}{=} \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

Vers la formule de Moivre

Q35. Dans cette question ω désigne une solution quelconque de l'équation $(\star_n)$: $z^n = 1$ où $n \in \mathbb{N}$.
Que vaut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$?

Éléments de correction

Si $\omega = 1$ **:** on a alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = n$.

Si $\omega \neq 1$ **:** on a alors que :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \underset{\substack{\omega \text{ solution de } (\star_n) \\ \text{donc on a : } \omega^n=1}}{=} \frac{1-1}{1-\omega} = 0$$

Q36. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$.

Éléments de correction

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout entier n.

Initialisation : on a $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^0 = 1$ et $\underbrace{\cos(0 \times x)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(0 \times x)}_{=0} = 1$ ce qui donne que $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^0 = \cos(0 \times x) + \mathrm{i}\,\sin(0 \times x)$ ce qui assure que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx)$.
Montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$ c'est à dire que l'on a $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} = \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\,\sin((n+1)x)$.
Puisque : $(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} = (\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^n \times (\cos(x) + \sin(x))$
par hypothèse de récurrence, on en déduit que :
$$\begin{aligned}(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x))^{n+1} &= (\cos(nx) + \mathrm{i}\,\sin(nx))\,(\cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x)) \\ &\underset{\substack{\text{Préliminaire} \\ \text{technique}}}{=} \cos(nx + x) + \mathrm{i}\,\sin(nx + x) \\ &= \cos((n+1)x) + \mathrm{i}\,\sin((n+1)x)\end{aligned}$$
ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q37. Montrer que tout complexe ω de la forme $\omega = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

CC BY NC ND

Éléments de correction

Par définition, ω est solution de $(\star_n)$ si, et seulement si $\omega^n = 1$.
Or on a d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned}\omega^n &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n\\ &= \cos\left(n\times\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(n\times\frac{2\pi}{n}\right)\\ &= \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\\ &= 1\end{aligned}$$

Q38. Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que tout complexe ω_k de la forme $\omega_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ est solution de l'équation $(\star_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

Sur le même principe ω_k est solution de $(\star_n)$ si, et seulement si $(\omega_k)^n = 1$.
Or on a d'après la question précédente que :

$$\begin{aligned}(\omega_k)^n &= \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^n\\ &= \cos\left(n\times\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(n\times\frac{2k\pi}{n}\right)\\ &= \underbrace{\cos(2k\pi)}_{=1} + \mathrm{i}\,\underbrace{\sin(2k\pi)}_{=0}\\ &= 1\end{aligned}$$

Problema número 4 | Un gran clásico de la computación matricial

Soit $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Calcul de A^n

Q39. On pose $Q = \begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$. Effectuer le produit matriciel PQ. Qu'en déduire ensuite pour P ?

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned}PQ &= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{I}_3\end{aligned}$$
Par suite, P est inversible à droite, donc inversible et d'inverse Q.

Q40. On définit la matrice T par $T = PAQ$. Exprimer T.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned} PAQ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q41. Calculer T^2, T^3 puis T^n pour tout entier $n \geq 3$.

Éléments de correction

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} T^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par suite que :
$$\begin{aligned} T^3 &= T^2 \times T \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par suite, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, T^n = (0)$.

Q42. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, A^n est la matrice nulle.

Éléments de correction

Puisque $T = PAQ$ et que $Q = P^{-1}$, en multipliant cette relation à gauche par Q, il vient que $QT = AQ$ et en multipliant cette relation à droite par P on en déduit que $QTP = A$, c'est à dire que $A = P^{-1}TP$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = P^{-1}T^nP$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que cette proposition est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a $A^0 = \mathrm{I}_3$ et :
$$\begin{aligned} P^{-1}T^0P &= P^{-1}\mathrm{I}_3P \\ &= P^{-1}P \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$$
d'où l'on a bien $A^0 = P^{-1}T^0P$ et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire $A^n = P^{-1}T^nP$.
Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire $A^{n+1} = P^{-1}T^{n+1}P$.
On a clairement que $A^{n+1} = A^n \times T$, donc par hypothèse de récurrence, il vient :
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= P^{-1}T^n \underbrace{P \times P^{-1}}_{=\mathrm{I}_3} TP \\ &= P^{-1} \underbrace{T^nT}_{=T^{n+1}} P \\ &= P^{-1}T^{n+1}P \end{aligned}$$
ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Ainsi, puisque $T^n = (0)$ pour tout n entier avec $n \geq 3$, on en déduit que $A^n = (0)$ pour tout entier n avec $n \geq 3$.

Exponentielle de la matrice A

Pour tout réel t, on définit la matrice $E(t)$ par $E(t) = \mathrm{I}_3 + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

Q43. Montrer que [6] : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ E(x)E(y) = E(x+y)$.

Éléments de correction

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a directement que :

$$\begin{aligned} E(x)E(y) &= \left(\mathrm{I}_3 + xA + \frac{x^2}{2}A\right)\left(\mathrm{I}_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2\right) \\ &= \mathrm{I}_3 + yA + \frac{y^2}{2}A^2 + xA + xyA^2 + \frac{y^2}{2}\underbrace{A^3}_{=(0)} + \frac{x^2}{2}A^2 + \frac{x^2y}{2}\underbrace{A^3}_{=(0)} + \frac{x^2y^2}{4}\underbrace{A^4}_{=(0)} \\ &= \mathrm{I}_3 + (x+y)A + \left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right)A^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + (x+y)A + \frac{1}{2}\left(x^2+2xy+y^2\right)A^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + (x+y)A + \frac{(x+y)^2}{2}A^2 \\ &= E(x+y) \end{aligned}$$

Q44. Soit $t \in \mathbb{R}$. Effectuer le produit matriciel $E(t)E(-t)$ puis montrer que $E(t)$ est inversible et déterminer son inverse en fonction de t, I_3, A et A^2.

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a $E(t)E(-t) = E(0)$ et comme $E(0) = \mathrm{I}_3$, on en dd́euit que $E(t)E(-t) = \mathrm{I}_3$, ce qui assure que $E(t)$ est inversible à droite, donc inversible, et d'inverse $E(-t)$.

Ainsi, on a : $\left(E(-t)\right)^{-1} = \mathrm{I}_3 - tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

Q45. Montrer par récurrence sur l'entier n que : $\forall t \in \mathbb{N},\ \left(E(t)\right)^n = E(nt)$.
Exprimer ensuite $\left(E(t)\right)^n$ en fonction de t, n, I_3, A et A^2.

Éléments de correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$:« $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Initialisation : on a $\left(E(t)\right)^0 = \mathrm{I}_3$ et : $\begin{aligned} E(0t) &= \mathrm{I}_3 + 0 \times A + \frac{0^2}{2} \times A^2 \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$

et ainsi $\left(E(t)\right)^0 = E(0t)$ ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire que $\left(E(t)\right)^n = E(nt)$.
Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire que l'on a $\left(E(t)\right)^{n+1} = E\left((n+1)t\right)$.
D'après les questions précédentes, on a : $\begin{aligned} E\left((n+1)t\right) &= E(nt+t) \\ &= E(nt)E(t) \end{aligned}$

et par hypothèse de récurrence, on a alors : $\begin{aligned} E\left((n+1)t\right) &= \left(E(t)\right)^n \times E(t) \\ &= \left(E(t)\right)^{n+1} \end{aligned}$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et héréditaire, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

On en déduit alors directement que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(E(t)\right)^n = \mathrm{I}_3 + ntA + \dfrac{n^2t^2}{2}A^2$.

6. Expliciter $E(x)$ et $E(y)$ puis développer l'expression $E(x) \times E(y)$ de sorte à obtenir $E(x+y)$