Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Calculatrice non autorisée

Rain of numbers

Les questions qui suivent sont totalement indépendantes.

Q1. Résoudre le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet de réels (x, y, z) : $\mathcal{S} : \begin{cases} -x + y - 2z = -3 \\ x + 2y + 2z = -3 \\ 2x - y + z = 7 \end{cases}$

Q2. Pour le système $\mathcal{S}$ ci-dessous donné directement par sa matrice augmentée associée, déterminer son rang et vérifier si ce dernier est compatible.

$$\mathcal{S} : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Q3. Résoudre le système $\mathcal{S}$ ci-dessous donné directement par sa matrice augmentée associée, et expliciter entièrement les solutions.

$$\mathcal{S} : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Sigma story

Les questions qui suivent sont totalement indépendantes.

Q4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer à l'aide du binôme de Newton les deux expressions $(2x+1)^4$ et $(x-2)^4$.

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

À l'aide d'un changement d'indice, exprimer en fonction de n la somme $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} (k+2)^2$.

Q6. On rappelle que $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$. Donner sous forme fractionnaire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer en fonction de n la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}}$.

To work the brain

On se propose dans cette partie de calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q8. À l'aide du binôme de Newton, montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Q9. Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$.

Q10. Justifier alors que $\sum_{k=2}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - n - 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Q11. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
Vérifier que : $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}$.

Q12. Dans cette question n désigne un entier naturel non nul, et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$.
En explicitant $\binom{n+1}{k+1}$ à l'aide de factorielles, montrer alors que : $\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Q13. Montrer alors à l'aide d'un changement d'indice que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}$ puis en déduire la valeur de la somme S_n.

Let's bundle up the brushes one last stroke

Dans tout ce qui suit, m désigne un réel quelconque.

On se propose dans les questions qui suivent d'étudier l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tel que le système $\mathcal{S}$ d'inconnue le triplet de réels (x, y, z) admette des solutions en fonction de m, et de les expliciter lorsque c'est le cas.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}$$

On admet qu'un échelonnement en lignes de la matrice augmentée de $\mathcal{S}$ a donné :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & a \\ 1 & m & 1 & b \\ 1 & 1 & m & c \end{array}\right) \underset{\cdots}{\sim_L} \ldots \underset{\cdots}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & b \\ 0 & 1-m & m-1 & c-b \\ 0 & 0 & m^2+m-2 & a+b-(1+m)c \end{array}\right)$$

Q14. Donner le rang de $\mathcal{S}$ en fonction de m.

Q15. Quelle(s) condition(s) doit-on avoir sur (a, b, c) pour que $\mathcal{S}$ soit compatible lorsque $m = -2$? Expliciter alors les solutions de $\mathcal{S}$.

Q16. Résoudre le système $\mathcal{H}$ d'inconnue le triplet de réels (a, b, c) : $\mathcal{H} : \begin{cases} -b + c = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$.

Q17. Donner un triplet (a, b, c) de réels tels que $\mathcal{S}$ admette une solution lorsque $m = -1$.

Q18. Que peut-on dire que $\mathcal{S}$ lorsque $m \notin \{-2, 1\}$?