À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs... La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Questions de cours | You choose

Q1. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ? Justifier vos réponses.

Assertion n° 1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10;\ \frac{2}{5}\right)$, alors $\mathbb{E}(X) = 4$.

Assertion n° 2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;10 \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{101}{12}$.

Assertion n° 3

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;5 \rrbracket)$, alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 11$.

Assertion n° 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10;\ p)$ avec $\mathbb{V}(X) = 2$, alors $p = \frac{1}{4}$.

Assertion n° 5

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;5 \rrbracket)$, alors $2X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2;10 \rrbracket)$.

Assertion n° 6

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\ p)$, alors $\mathbb{P}([X = 0]) = (1-p)^n$.

Assertion n° 7

Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}([X = \mathbb{E}(X)]) = 1$.

Assertion n° 8

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(b-X)$.

Éléments de correction

Les réponses correctes sont en vert, les incorrectes en rouge.

Assertion n° 1

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10;\ \frac{2}{5}\right)$, alors $\mathbb{E}(X) = 4$.

En effet, on aura $\mathbb{E}(X) = 10 \times \frac{2}{5} = 4$ puisque X suit une loi binomiale.

Assertion n° 2

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;10 \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{101}{12}$.

On devrait avoir $\mathbb{V}(X) = \frac{10^2-1}{12} = \frac{99}{12} \neq \frac{101}{12}$.

Assertion n° 3

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;5 \rrbracket)$, alors $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 11$.

Le théorème du transfert donne :
$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5}$
ce qui donne $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{5}(1+4+9+16+25)$ et donc que $\mathbb{E}(X^2) = \frac{55}{5} = 11$.

Assertion n° 4

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10;\ p)$ avec $\mathbb{V}(X) = 2$, alors $p = \frac{1}{4}$.

Si $p = \frac{1}{4}$ pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10;\ p)$, on devrait avoir $\mathbb{V}(X) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \neq 2$.

Assertion n° 5

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;5 \rrbracket)$, alors $2X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 2;10 \rrbracket)$.

Dans ce cas, on $(2X)(\Omega) = \{2,4,6,8,10\} \neq \llbracket 2;10 \rrbracket$.

Assertion n° 6

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\ p)$, alors $\mathbb{P}([X = 0]) = (1-p)^n$.

On sait que $\mathbb{P}([X=0]) = \binom{n}{0} \times p^0 \times (1-p)^{n-0}$ et comme $\binom{n}{0} = 1$ et $p^0 = 1$, on a $\mathbb{P}([X=0]) = (1-p)^n$.

Assertion n° 7

Si $\mathbb{V}(X) = 0$, alors $\mathbb{P}\left([X = \mathbb{E}(X)]\right) = 1$.

C'est une conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Assertion n° 8

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(X + a) = \mathbb{V}(b - X)$.

Par bilinéarité, on a $\mathbb{V}(X+a) = \mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(b-X) = (-1)^2\mathbb{V}(X)$.

Exercice n° 1 | Warm-up

On choisit au hasard deux numéros distincts de l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et on définit une variable aléatoire X comme étant le produit des deux numéros ainsi choisis.

Une issue de cette expérience peut donc être vue comme un couple d'entiers (n_1, n_2) où $n_1 \neq n_2$ tous deux pris dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Q2. En désignant Ω l'univers des possibles, explicitez les dix issues possibles sous forme de couples d'entiers tels que décrits plus haut.

Éléments de correction

En explicitant tous les couples possibles, il vient que :

$$\Omega = \{(-2,1), (-2,0), (-2,1), (-2,2), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,2)\}$$

On remarquera en fait, que l'on devrait plutôt s'intéresser à des paires de résultats, mais le fait que l'on ne peut pas prendre deux fois le même numéro nous place dans une situation où l'on peut se contenter de travailler avec les couples de résultats puisque chacun d'entre eux correspondra à deux paires apportant les mêmes informations.
Abusivement l'énoncé nous force à écrire que « $(-2, 0) = (0, -2)$ ».

Q3. Donner le support $X(\Omega)$ de X.

Éléments de correction

Comp-tenu de la question, précédente, les produits possibles sont -4, -2, -1, 0 et 2, et ainsi $X(\Omega) = \{-4, -2, -1, 0, 2\}$.

Q4. Décrire les évenements $[X = k]$ où $k \in X(\Omega)$ à l'aide des événements élémentaires.

Éléments de correction

On a directement que :

- $[X = -4] = \{(-2, 2)\}$
- $[X = -2] = \{(-2, 1), (-1, 2)\}$
- $[X = -1] = \{(-1, 1)\}$
- $[X = 0] = \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, 2)\}$
- $[X = 2] = \{(-2, -1), (1, 2)\}$

Q5. Donner la loi de X.

Éléments de correction

On peut supposer que l'on munit Ω de l'équiprobabilité. Par suite, on en déduit directement la loi de X :

x_i	-4	-2	-1	0	2
$\mathbb{P}([X = x_i])$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$

Q6. Déterminer $\mathbb{P}\left([X \in [\![-2; 0]\!]]\right)$.

Éléments de correction

On a directement que $X \in [\![-2;0]\!] = [X=-2] \cup [X=-1] \cup [X=0]$, cette union étant disjointe.
Par suite :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left([X \in [\![-2;0]\!]]\right) &= \mathbb{P}\left([X=-2]\right) + \mathbb{P}\left([X=-1]\right) + \mathbb{P}\left([X=0]\right) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{4}{10} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

Q7. Donner sous forme d'une fraction simplifiée, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Éléments de correction

Par définition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X=x])$, ce qui donne ici :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= (-4) \times \frac{1}{10} + (-2) \times \frac{2}{10} + (-1) \times \frac{1}{10} + 0 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{2}{10} \\ &= \frac{-5}{10} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$
D'après la formule de Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$.
Or d'après le théorème du transfert, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}([X=x])$, ce qui donne ici :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^2\right) &= (-4)^2 \times \frac{1}{10} + (-2)^2 \times \frac{2}{10} + (-1)^2 \times \frac{1}{10} + 0^2 \times \frac{4}{10} + 2^2 \times \frac{2}{10} \\ &= \frac{33}{10} \end{aligned}$$
et finalement on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{33}{10} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{66}{20} - \frac{5}{20} \\ &= \frac{61}{20} \end{aligned}$$

Exercice no 2 | A box story

On dispose d'une boîte contenant trois objets appelés A, B et C.

Un jeu consiste en une succession de tirages d'un objet, avec remise dans la boîte après chaque tirage. À chaque tirage, le joueur gagne 1 euro s'il tire l'objet A, ne gagne ni ne perd s'il tire l'objet B, et perd tout ce qu'il a gagné précédemment s'il tire l'objet C.

On note X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue de n tirages.

On note aussi A_i (respectivement B_i, C_i) l'événement : « au i^{e} tirage, on obtient l'objet A (resp. B, C) ».

Q8. Préliminaire technique : on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$.

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Éléments de correction

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. La solution de l'équation $x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ est clairement $\ell = \frac{1}{2}$. On sait alors que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = \frac{1}{6}$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,$
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

Q9. Déterminer les lois de X_1 et X_2.

Éléments de correction

- On a $X_1(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$\hookrightarrow$ $\mathbb{P}([X_1=1]) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{3}$

$\hookrightarrow$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1=0]) &= \mathbb{P}(B_1\cup C_1)\\ &\underset{\text{Union disjointe}}{=} \mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(C_1)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- On a $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.

$\hookrightarrow$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2=2]) &= \mathbb{P}(A_1\cap A_2)\\ &\underset{\text{Indép.}}{=} \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(A_2)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2=1]) &= \mathbb{P}((A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap A_2)\cup(C_1\cap A2))\\ &\underset{\text{Union disjointe}}{=} \mathbb{P}(A_1\cap B_2)+\mathbb{P}(B_1\cap A_2)+\mathbb{P}(C_1\cap A2)\\ &\underset{\text{Indép.}}{=} \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(B_2)+\mathbb{P}(B_1)\times A_2+\mathbb{P}(C_1)\times\mathbb{P}(A2)\\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ et par suite $\mathbb{P}([X_2=0]) = \dfrac{5}{9}$

Q10. Déterminer l'espérance et la variance de X_1.

Éléments de correction

Compte-tenu de sa définition, puisque $X_1(\Omega) = \{0,1\}$, il s'agit d'une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
Par suite, on en déduit que $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{3}$ et que $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}$ c'est à dire $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{2}{9}$.

Q11. Calculer $\mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

Éléments de correction

On a directement :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= 0\times\mathbb{P}([X_2=0])+1\times\mathbb{P}([X_2=1])+2\times\mathbb{P}([X_2=2])\\ &= 0+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{9}\\ &= \frac{5}{9}\end{aligned}$$

D'après le théorème du transfert, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2^2) &= 0^2\times\mathbb{P}([X_2=0])+1^2\times\mathbb{P}([X_2=1])+2^2\times\mathbb{P}([X_2=2])\\ &= 0+1\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{9}\\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

et la formule de Huygens donne alors :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_2) &= \mathbb{E}(X_2^2)-(\mathbb{E}(X_2))^2\\ &= \tfrac{7}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^2\\ &= \frac{7}{9}-\frac{25}{81}\\ &= \frac{63}{81}-\frac{25}{81}\\ &= \frac{38}{81}\end{aligned}$$

Q12. Calculer $\mathbb{P}([X_n = n])$ en fonction de n.

Éléments de correction

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n = n]) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \\ &\underset{\text{Indép.}}{=} \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut X_{n+1} lorsque l'évenement $[[X_n = 0] \cap [B_{n+1} \cup C_{n+1}]] \cup [[X_n \neq 0] \cap C_{n+1}]$ est réalisé ?

Éléments de correction

Les deux événements $[X_n = 0] \cap [B_{n+1} \cup C_{n+1}]$ et $[X_n \neq 0] \cap C_{n+1}$ nous donnent une information sur l'état de la boîte à l'issue du $n + 1^{e}$ tirage.
Pour $[X_n = 0] \cap [B_{n+1} \cup C_{n+1}]$ on sait que l'on tire au $n+1^{e}$ tirage un objet B ou un objet C. Comme on a $[X_n = 0]$, le fait de tirer B ne lui rapportera rien, et même s'il tire C, son crédit restera nul. Ainsi, $X_{n+1} = 0$ pour cet événement.
Sur le même principe, l'événement $[X_n \neq 0] \cap C_{n+1}$ conduira à tout perdre à l'issue du $n + 1^{e}$ tirage, et dans ce cas encore $X_{n+1} = 0$.
Or pour que $X_{n+1} = 0$, seuls deux cas sont possibles :

- soit $X_n \neq 0$ et on tire un objet C
- soit $X_n = 0$ et on tire un objet B ou un objet C.

Par conséquent on aura $X_{n+1} = 0$ si l'évńement proposé est réalisé, et on peut même dire que $[X_{n+1} = 0] = [[X_n = 0] \cap [B_{n+1} \cup C_{n+1}]] \cup [[X_n \neq 0] \cap C_{n+1}]$.

Q14. Exprimer $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0])$ en fonction de $\mathbb{P}([X_n = 0])$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}([X_n = 0])$ en fonction de n.

Éléments de correction

$[X_{n+1} = 0] = [[X_n = 0] \cap [B_{n+1} \cup C_{n+1}]] \cup [[X_n \neq 0] \cap C_{n+1}]$ et par incompatibilité des événements situés dans les crochets, puis indépendance du $(n + 1)^{e}$ tirage avec les précédents, on a :

$\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \mathbb{P}([X_n = 0]) \times \frac{2}{3} + (1 - \mathbb{P}([X_n = 0])) \times \frac{1}{3}$ qui donne : $\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = 0])$

On reconnaît alors que la suite (u_n) de terme général $u_n = \mathbb{P}([X_n = 0])$ est une suite arithmético-géométrique, qui donne par suite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X_n = 0]) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Q15. Soient a et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = a]) = \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = a]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = a - 1])$$

Éléments de correction

Pour gagner a euros avec $a > 0$, en $(n + 1)$ tirages, il n'y a que deux solutions : gagner a euros à l'issue des n premiers tirages et obtenir l'objet B au $(n + 1)^{e}$ tirage, ou bien gagner $(a - 1)$ euros à l'issue des n premiers tirages et obtenir l'objet A au $(n + 1)^{e}$ tirage.
Ainsi : $[X_{n+1} = a] = [[X_n = a] \cap B_{n+1}] \cup [[X_n = a - 1] \cap A_{n+1}]$
Par suite :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = a) &= \mathbb{P}([[X_n = a] \cap B_{n+1}] \cup [[X_n = a - 1] \cap A_{n+1}]) \\ &\underset{\substack{\text{Union}\\\text{disjointe}}}{=} \mathbb{P}([X_n = a] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = a - 1] \cap A_{n+1}) \\ &\underset{\text{Indép.}}{=} \mathbb{P}([X_n = a]) \times \mathbb{P}(B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = a - 1]) \times \mathbb{P}(A_n + 1) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = a]) + \frac{1}{3}\mathbb{P}([X_n = a - 1])\end{aligned}$$

Q16. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n+1})$.

Éléments de correction

$X_{n+1}(\Omega) = [\![0; n+1]\!]$ et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \sum_{a=0}^{n+1} a\mathbb{P}([X_{n+1}=a]) \\ &= \sum_{a=1}^{+\infty} a\mathbb{P}([X_{n+1}=a]) \\ &= \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n+1} a\mathbb{P}([X_n=a]) + \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n+1} a\mathbb{P}([X_n=a-1])\end{aligned}$$

Dans la première somme, le terme d'indice $n+1$ est nul et dans la seconde somme, on effectue le changement d'indice $b=a-1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{n} a\mathbb{P}([X_n=A]) + \frac{1}{3}\sum_{b=0}^{n} b\mathbb{P}([X_n=b]) + \frac{1}{3}\sum_{b=0}^{n} \mathbb{P}([X_n=b]) \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{3}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{3}\sum_{b=0}^{n}\mathbb{P}([X_n=b]) \\ &= \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Q17. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Éléments de correction

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encore une suite arithmético-géométrique. Sur le même principe que dans le préliminaire technique, on obtient ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(X_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Par ailleurs, puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, on sait que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et par conséquent que $\mathbb{E}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice n° 3 | Dice and coins

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de « pile » soit égale à $p \in]0;1[$, et on notera $q = 1-p$ pour la suite.

Soit N un entier naturel non nul fixé.

On effectue N lancers du dé, et si on note n le nombre de fois que la face 6 est apparue, on lance alors n fois la pièce.

On définit alors les trois variables aléatoires suivantes :

- Z indique le nombre de 6 obtenus lors des lancers du dé ;
- X indique le nombre de « pile » obtenus aux lancers de la pièce ;
- Y indique le nombre de « face » obtenues aux lancers de la pièce.

Il est immédiat que $X+Y=Z$ et que si Z prend la valeurs 0, alors X et Y prennent aussi la valeur 0.

Q18. **Préliminaire technique :** Montrer que pour tout couple d'entiers naturel (n,k) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$, on a :

$$\binom{n}{k}\binom{N}{n} = \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}$$

Éléments de correction

En utilisant directement la définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\binom{N}{n} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!} \\ &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!\,((N-k)-(n-k))!} \\ &= \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k}\end{aligned}$$

Q19. Reconnaître, en la justifiant, la loi de Z. En donner alors son espérance et sa variance.

Éléments de correction

On met en évidence le schéma de Bernoulli suivant :

Épreuve de Bernoulli : on lance un dé et on regarde si le 6 est sorti

Succès et probabilité du succès : « on obtient le 6 », et comme le dé est non truqué, la probabilité du succès est $\frac{1}{6}$.

Nombre de répétitions : N

Indépendance lors des répétitions : les lancers sont supposés indépendants

Par suite, Z comptant le nombre de succès lors de la réalisation d'un tel schéma, suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N; \frac{1}{6}\right)$.

Par suite, on a directement que $\mathbb{E}(Z) = \frac{N}{6}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{5N}{36}$.

Q20. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k])$.
On pensera à distinguer les cas $k \in [\![0; n]\!]$ et $k > n$.

Éléments de correction

Sachant que lévénement $[Z = n]$ est réalisé, X est le nombre de réalisations de l'événement « on obtient « pile » de probabilité constante p au cours de n lancers indépendants ».
Ainsi, on en déduit que :

Cas $k > n$: $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) = 0$

Cas $0 \leq k \leq n$: on peut considérer que X sachant $[Z = n]$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ et ainsi $\mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Q21. Montrer que pour tout couple d'entiers (k, n) :

- si $0 \leq k \leq n \leq N$, alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$;
- si $n > N$ ou $k > n$, alors $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

Éléments de correction

Si $0 \leq k \leq n \leq N$, on a directement d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) &= \mathbb{P}([Z = n]) \times \mathbb{P}_{[Z=n]}([X = k]) \\
&= \binom{N}{n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\binom{N}{n} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

Si $n > N$ ou $k > n$, l'événement $[X = k] \cap [Z = n]$ est lévénement impossible et donc $\mathbb{P}([X = k] \cap [Z = n]) = 0$.

Q22. Calculer la probabilité de l'événement $[X = 0]$ à l'aide d'un système complet d'événements judicieusement choisi.

Éléments de correction

Les événements $([Z = n])_{n \in [\![0;N]\!]}$ forment un système complet d'événements tous des probabilités non nulles. Par suite, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=0]) &= \sum_{n=0}^{n} \mathbb{P}([X=0]\cap[Z=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{6^N} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (1-p)^n \, 5^{N-n} \\
&= \frac{1}{6^N} (1-p+5)^N \\
&= \frac{1}{6^N} (6-p)^N \\
&= \left(\frac{6-p}{6}\right)^N \\
&= \left(1-\frac{p}{6}\right)^N
\end{aligned}$$

Q23. Pour tout $k \in [\![1;N]\!]$, déterminer $\mathbb{P}([X=k])$. Le résultat reste-t-il valable pour $k=0$?

Éléments de correction

Toujours en utilisant les événements $([Z=n])_{n\in[\![0;N]\!]}$ qui forment un système complet d'événements tous des probabilités non nulle, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}([X=k]\cap[Z=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{N} \mathbb{P}([X=k]\cap[Z=n]) \\
&= \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{n}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= \frac{p^k}{6^k} \sum_{n=k}^{N} \binom{N}{k}\binom{N-k}{n-k} (1-p)^{n-k} 5^{N-n} \\
&= \binom{N}{k} \frac{p^k}{6^N} \sum_{n=k}^{N} \binom{N-k}{n-k} (1-p)^{n-k} 5^{N-n} \\
&= \binom{N}{k} \frac{p^k}{6^N} \sum_{i=0}^{N-k} \binom{N-k}{i} (1-p)^{i} 5^{N-(k+i)} \\
&= \binom{N}{k} \frac{p^k}{6^N} (1-p+5)^{N-k} \\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}
\end{aligned}$$

Ce dernier résultat reste valable pour $k=0$ et ainsi : $\forall k \in [\![0;n]\!]\,,\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{N}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1-\frac{p}{6}\right)^{N-k}$

Q24. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$

Éléments de correction

D'après la question précédente, on a pu établir que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(N;\, \frac{p}{6}\right)$. Sur le même principe Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N;\, \frac{q}{6}\right)$.

Par conséquent $\mathbb{E}(X) = \dfrac{Np}{6}$ et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{Nq}{6}$.

Problème | Student nightmare

Un professeur interroge au hasard les étudiants d'une classe de N étudiants. Il dispose d'une liste de questions, éventuellement infinie, et pour chaque question il interroge au hasard un étudiant.

Les étudiants sont appelés $E_1, \ldots, E_N$, et on note ainsi $E = \{E_1, \ldots, E_N\}$ l'ensemble des étudiants.

Pour tout $i \in [\![1;N]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note $Q_{i,k}$ l'événement « l'étudiant E_i est interrogé pour répondre à la question numéro k ».

On considère que les désignations d'élèves pour les différentes questions sont des événements mutuellement indépendants et que, pour une question donnée, tous les étudiants ont la même probabilité d'être choisis.

L'univers Ω permettant de décrire cette situation est l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans E.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants différents interrogés sur l'ensemble des n premières questions posées.

Par exemple, si $N = 15$ et si le professeur a posé six questions successivement aux étudiants E_3, E_1, E_7, E_1, E_{12} et E_3, on aura $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$ $X_4 = 3$, $X_5 = 4$ et $X_6 = 4$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la matrice à N lignes et 1 colonne définie par $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X_n = N]) \end{pmatrix}$ où l'on rappelle que $\mathbb{P}([X_n = i])$ désigne la probabilité d'avoir interrogé i étudiants différentes sur l'ensemble des n premières questions avec $i \in [\![1;N]\!]$.

Partie A - Étude de X_2

On suppose dans cette partie que le professeur pose deux questions.

Q25. Déterminer $X_2(\Omega)$.

Éléments de correction

Le professeur posant deux questions, il peut soit poser ses questions à deux étudiants différents, soit interroger le même étudiant deux fois de suite. Ainsi, $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.

Q26. Décrire à l'aide des événements $Q_{i,1}$ et $Q_{i,2}$, l'événement $[X_2 = 1]$.

Éléments de correction

L'événement $[X_2 = 1]$ correspond au fait d'interroger le même étudiant pour les deux questions posées.

Ainsi : $$\begin{aligned} [X_2 = 1] &= (Q_{1,1} \cap Q_{1,2}) \cup (Q_{2,1} \cap Q_{2,2}) \cup \ldots \cup (Q_{N,1} \cap Q_{N,2}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{N} (Q_{i,1} \cap Q_{i,2}) \end{aligned}$$

Q27. Montrer que $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \dfrac{1}{N}$, puis la loi de X_2.

Éléments de correction

L'union $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} (Q_{i,1} \cap Q_{i,2})$ étant clairement disjointe, on a donc $[X_2 = 1] = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(Q_{i,1} \cap Q_{i,2})$.

Les événements $Q_{i,1}$ et $Q_{i,2}$ étant indépendants, on en déduit que $\mathbb{P}(Q_{i,1} \cap Q_{i,2}) = \mathbb{P}(Q_{i,1}) \times \mathbb{P}(Q_{i,2})$.

Ainsi, $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(Q_{i,1}) \times \mathbb{P}(Q_{i,2})$. Or $\mathbb{P}(Q_{i,1}) = \mathbb{P}(Q_{i,2}) = \dfrac{1}{N}$ par hypothèse.

On en déduit donc que : $$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N^2} \\ &= N \times \frac{1}{N^2} \\ &= \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}([X_2 = 1]) + \mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1$, on en déduit $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1])$, ce qui donne $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \dfrac{N-1}{N}$.

Q28. Calculer l'espérance de X_2.

Éléments de correction

X_2 étant une variable aléatoire à support finie, elle admet une espérance, qui vaut par définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1\times\mathbb{P}([X_2=1])+2\times\mathbb{P}([X_2=2])\\ &= 1\times\frac{1}{N}+2\times\frac{N-1}{N}\\ &= \frac{2N-1}{N}\end{aligned}$$

Partie B - Étude du cas général

Dans cette partie, n désigne un entier tel que $n\geq 2$.

Q29. Déterminer $X_n(\Omega)$ en fonction de N.

Éléments de correction

Cas où $n<N$ **:** on est dans le cas où l'on pose moins de questions que ce que l'on a d'étudiants. Donc, dans la pire des situations, l'enseignant interroge n fois le même étudiants, ou au mieux, en interroger n de différents. Ainsi $X_n(\Omega)=[\![1;n]\!]$ dans ce cas.

Cas où $n\geq N$ il est clair que X_n prendra au plus la valeur N puisque que l'on est dans le cas où l'on pose plus de questions que ce que l'on a d'étudiants. Dans le meilleur des cas sur les N premières questions, on a interrogé N étudiants différents, toutes les questions posées ensuite le seront à un étudiants qui a déjà éte interrogé. Ainsi $X_n(\Omega)=[\![1;N]\!]$ dans ce cas.

Q30. Pour $n<N$, déterminer alors $\mathbb{P}([X_n=i])$ pour $i\in[\![n+1;N]\!]$.

Éléments de correction

Si $n<N$, on ne peut pas interroger plus d'étudiants que ce qu'il y a de questions, et donc $\mathbb{P}([X_n=i])=0$ pour tout $i\in[\![n+1;N]\!]$.

Q31. On suppose dans cette question uniquement que $n<N$. Décrire à l'aide de X_n l'événement $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N}\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)$.

Éléments de correction

Pour i fixé, |'événement $\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)=Q_{i,1}\cap Q_{i,2}\cap\ldots\cap Q_{i,n}$ correspond donc à l'événement « l'enseignant a posé les n questions à l'étudiant E_i », ce qui amène dans ce cas la réalisation de l'événement $[X_n=1]$.

Par suite, on en déduit que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N}\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)=[X_n=1]$ puisque cela correpond à la réunion disjointe des événements « l'enseignant a posé les n questions à l'étudiant E_i » pour i décrivant $[\![1;N]\!]$, c'est à dire l'ensemble des étudiants.

Q32. Que vaut $\mathbb{P}([X_n=1])$ lorsque $n<N$?

Éléments de correction

D'après la question précédente $[X_n=1]=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{N}\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)$, et cette union étant disjointe, il vient $\mathbb{P}([X_n=1])=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)$. Or les événements $Q_{i,1},\ldots,Q_{i,n}$ étant indépendants, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}Q_{i,k}\right)=\displaystyle\prod_{i=1}^{N}\mathbb{P}(Q_{i,k})$.

Or $\mathbb{P}(Q_{i,1})=\mathbb{P}(Q_{i,2})=\ldots=\mathbb{P}(Q_{i,k})=\dfrac{1}{N}$ par hypothèse, il vient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n=1]) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{N^n}\\ &= N\times\frac{1}{N^n}\\ &= \frac{1}{N^{n-1}}\end{aligned}$$

Q33. Soit $i\in[\![2;N]\!]$. Montrer que : $\mathbb{P}([X_n=i])=\dfrac{i}{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=i])+\dfrac{N-i+1}{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=i-1])$

Éléments de correction

Les événements $([X_{n-1}=k])_{k\in[\![1;N]\!]}$ forment un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_n=i]) &= \sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=k])\times\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n=i])\\ &= \sum_{k=1}^{i-2}\mathbb{P}([X_{n-1}=k])\times\underbrace{\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n=i])}_{=0}\\ &\quad+\mathbb{P}([X_{n-1}=i-1])\,\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i-1]}([X_n=i])+\mathbb{P}([X_{n-1}=i])\,\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}([X_n=i])\\ &\quad+\sum_{k=i+1}^{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=k])\times\underbrace{\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n=i])}_{=0}\\ &= \mathbb{P}([X_{n-1}=i-1])\,\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i-1]}([X_n=i])+\mathbb{P}([X_{n-1}=i])\,\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}([X_n=i])\end{aligned}$$

Or on a : $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i]}([X_n=i])=\dfrac{i}{N}$ et $\mathbb{P}_{[X_{n-1}=i-1]}([X_n=i])=\dfrac{N-(i-1)}{N}$

Finalement, on a bien : $\mathbb{P}([X_n=i])=\dfrac{i}{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=i])+\dfrac{N-i+1}{N}\mathbb{P}([X_{n-1}=i-1])$

Q34. Déterminer une matrice $A_n\in\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ telle que : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ U_n=A_NU_{n-1}$.

Éléments de correction

On pose $A_N=\begin{pmatrix}\frac{1}{N} & 0 & 0 & \dots & 0\\ \frac{N-1}{N} & \frac{2}{N} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{N} & 1\end{pmatrix}$.

Un calcul direct en utilisant le résultat de la question précédente donne que $U_n=A_NU_{n-1}$