Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS19-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Problème n° 1 | Intégrales et séries numériques

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence de trois séries à l'aide de calculs d'intégrales.

Partie A | Étude de la convergence d'une série de Bertrand

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence de la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

On désigne alors par f la fonction définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x\ln(x)} \end{array} \right.$.

Q2. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Justifier que : $\forall x \in [k;k+1]\,,\ \frac{1}{k\ln(k)} \geq \frac{1}{x\ln(x)}$.

Q4. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \frac{1}{k\ln(k)} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. En sommant ces inégalités et à l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln(2)\right)$$

On pourra au moment adéquat, remarquer que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$.

Q6. Déterminer alors la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Partie B | Étude de la convergence et somme d'une série exponentielle

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{n+1} - I_n = -\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}\,(1-x)^n\,(n+x)\,\mathrm{d}x$.

Q8. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q9. Justifier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q10. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$.

Q11. Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q12. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Q13. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = I_0 - I_n$.

Q14. Établir à l'aide des résultats précédents la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ et sa somme.

Partie C | Étude du comportement asymptotique de la série harmonique

On rappelle que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k}$, appelée aussi série harmonique, est une série divergente.

On se propose dans cette partie d'en déterminer le comportement asymptotique, c'est à dire de le « mesurer » à celui de suites de références.

On notera alors $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\forall x \in [k; k+1]\,,\, \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$.

Q16. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\, \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$.

Q18. En déduire que $\dfrac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Problème n° 2 | Endomomorphisme dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans tout ce problème, on désigne par A, B, C et T les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Partie A | Étude des éléments de $\mathcal{E}$

Q19. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q20. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ formée par les matrices A, B et C est une base de $\mathcal{E}$.

Q21. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Q22. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall\,(M,N) \in \mathcal{E},\, MN \in \mathcal{E}$.

Q23. Soit $M \in \mathcal{E}$ que l'on suppose inversible. Montrer alors que M^{-1} appartient aussi à $\mathcal{E}$.

Partie B | Étude d'un endomorphisme

On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.

Q24. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q25. Vérifier que T est inversible, puis démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Q26. Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ et les exprimer en fonction de A, B et C.

Q27. Déterminer alors la matrice F de f dans la base $\mathcal{B} = (A, B, C)$

Partie C | Décomposition de f

Dans tout ce qui suit, on note $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q28. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$ d'inconnue la matrice $M \in \mathcal{E}$.

Q29. Calculer H^2, puis pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{I}_3 + aH)^n$.

Q30. Calculer F^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q31. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.

Q32. Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Problème n° 3 | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce problème, on désigne par $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A | Étude d'un endomorphisme

On considère alors l'application f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} & \longmapsto & M + (a+d)\mathrm{I}_2 \end{array} \right.$

Q33. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q34. Exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de cette même famille.

Q35. Vérifier que la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B | Changement de base pour f

Q36. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q37. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$.

Q38. En déduire l'existence d'une matrice P inversible que l'on explicitera telle que $A = PDP^{-1}$.

Partie C | Puissances de la matrice A

Q39. Déterminer l'inverse de la matrice P trouvée à la question précédente.

Q40. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Q41. En déduire explicitement la matrice A^n.