Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Tout appareil électronique permettant d'effectuer un calcul n'est pas autorisé.
Les tables d'opérations ne sont pas autorisées.
Aucun document ou formulaire n'est autorisé.

Préambule | Consignes générales

Q1. Écrire au centre de la première ligne de votre première feuille de composition, ainsi que de toutes les suivantes, vos nom, prénom, classe, référence de devoir et date selon le format `NOM-PRENOM-CPGE-BL1-DS19-JJ/MM/AAAA`, puis sur la ligne qui suit, tirer un trait sur toute la largeur de la ligne, et commencer votre devoir par le problème de votre choix et chaque problème doit commencer sur une nouvelle copie double.

Q 1| Éléments de réponse

C'est pas gagné pour tout le monde.

Problème n° 1 | Intégrales et séries numériques

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence de trois séries à l'aide de calculs d'intégrales.

Partie A | Étude de la convergence d'une série de Bertrand

On se propose dans cette partie d'étudier la convergence de la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

On désigne alors par f la fonction définie par : $f : \left|\begin{array}{ccc} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\ln(x)} \end{array}\right.$.

Q2. Construire, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction f.

Q 2| Éléments de réponse

La fonction $x \longmapsto x\ln(x)$ est continue et dérivable sur $[2;+\infty[$ par opérations usuelles, et ne s'y annule par, donc par quotient, la fonction f est continue et dérivable sur $[2;+\infty[$.

Un calcul direct donne alors que :
$$\begin{aligned}\forall x \in [2;+\infty[\,,\ f'(x) &= -\frac{1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}}{(x\ln(x))^2}\\ &= -\frac{\ln(x)+1}{(x\ln(x))^2}\end{aligned}$$

Les variations de la fonction $\ln$ sur $[2;+\infty[$ y assure sa positivité, et par suite que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ \ln(x)+1 \geq 0$.
On en déduit alors que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ f'(x) \leq 0$.
Par ailleurs, il est direct que $x\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit alors les variations de f sur $[2;+\infty[$.

x	2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$\frac{1}{2\ln(2)}$	$\searrow$	0

Q3. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Justifier que : $\forall x \in [k;k+1]\,,\ \dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

Q 3| Éléments de réponse

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'étude précédente assure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[k;k+1]$ donc que :

$$\forall x \in [k;k+1]\,,\ f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

et donc que : $\forall x \in [k;k+1]\,,\ \dfrac{1}{k\ln(x)} \geq \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Q4. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Q 4| Éléments de réponse

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{k\ln(k)}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ étant continues sur $[k;k+1]$, la croissance de l'intégrale assure que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}\,\mathrm{d}x \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

et un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{k\ln(k)}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x}{k\ln(k)}\right]_k^{k+1} \\ &= \frac{k+1}{k\ln(k)} - \frac{k}{k\ln(k)} \\ &= \frac{1}{k\ln(k)} \end{aligned}$$

et on obtient ainsi l'inégalité demandée.

Q5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. En sommant ces inégalités et à l'aide de la relation de Chasles, montrer que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln(2)\right)$$

On pourra au moment adéquat, remarquer que : $\forall x \in [2;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$.

Q 5| Éléments de réponse

On sait que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,,\ \dfrac{1}{k\ln(k)} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.

Donc par sommation, il vient que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \sum_{k=2}^{n} \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x\right)$.

Or d'après la relation de Chasles, il vient que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x\right) = \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)}$.

Un calcul direct donne alors que :
$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} \frac{1}{x\ln(x)} &= \left[\ln\left(\ln(x)\right)\right]_2^{n+1} \\ &= \ln\left(\ln(n+1)\right) - \ln\left(\ln(2)\right) \end{aligned}$$

et on obtient alors le résultat attendu.

Q6. Déterminer alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

Q 6| Éléments de réponse

Il est direct que $\ln(\ln(n+1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par le théorème de minoration, il vient que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ n'étant pas convergente, par définition, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}$ est divergente.

Partie B | Étude de la convergence et somme d'une série exponentielle

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} \mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n(n+x)\,\mathrm{d}x$.

Q 7| Éléments de réponse

Par linéarité de l'intégrale, il vient que :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x - \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n}{n!}\left(\frac{1-x}{n+1} - 1\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n}{n!} \times \frac{-n-x}{n+1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n(n+x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Q8. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 8| Éléments de réponse

Les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont données par le signe de la différence $I_{n+1} - I_n$.
Il est immédiat que : $\forall x \in [0;1]$, $\underbrace{\mathrm{e}^{\,x}}_{\geq 0}\underbrace{(1-x)^n}_{\geq 0}\underbrace{(n+x)}_{\geq 0} \geq 0$
La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n(n+x)$ étant continue et positive sur $[0;1]$, d'après la positivité de l'intégrale, on a donc :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n(n+x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

et par suite que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{-\dfrac{1}{(n+1)!}}_{\leq 0}\underbrace{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}(1-x)^n(n+x)\,\mathrm{d}x}_{\geq 0} \geq 0$
Ainsi, on a que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \geq 0$
et par conséquent, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q9. Justifier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 9| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}$ étant continue et positive sur $[0;1]$, d'après la positivité de l'intégrale, il vient que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Ainsi, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs, donc est minorée par 0.
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Q10. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, 0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$.

Q 10| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.
La croissance la fonction exponentielle sur $[0;1]$, assure que : $\forall x \in [0;1]\,,\, 1 \leq \mathrm{e}^{\,x} \leq \mathrm{e}$
Par ailleurs, on a : $\forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq 1-x \leq 1$
et par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$, on a : $\forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq (1-x)^n \leq 1$
Il vient donc que : $\forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq (1-x)^n \mathrm{e}^{\,x} \leq \mathrm{e}$
et par conséquent que : $\forall x \in [0;1]\,,\, 0 \leq \dfrac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,n} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$
Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,n}$ et $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$ étant continue sur $[0;1]$, de l'inégalité établie, la positivité et la croissance de l'intégrale donne que :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}x$$

Un calcul direct donne que : $$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}}{n!}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{\mathrm{e}\,x}{n!}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}}{n!}\end{aligned}$$

et par suite, il vient que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$

Q11. Conclure quant à la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 11| Éléments de réponse

Puisque : $\forall n \in \mathbb{N},\, \leq I_n \leq \dfrac{\mathrm{e}}{n!}$
et que $\dfrac{\mathrm{e}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème d'encadrement, il vient que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Q12. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\, I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

Q 12| Éléments de réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En posant : $$\begin{array}{lcl} u(x) = \mathrm{e}^{\,x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \mathrm{e}^{\,x} \\ v(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \dfrac{(1-x)^n}{n!} \end{array}$$
où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, une intégration par parties donne que :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\right]_0^1 + \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x}_{=I_{n+1}} \\ &= 0 + \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} \end{aligned}$$

Q13. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = I_0 - I_n$.

Q 13| Éléments de réponse

De la question précédente, on en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\, I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$

Par sommation de ces égalités, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N},\, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$

et donc par téléscopage que : $\forall n \in \mathbb{N},\, I_0 - I_{n+1} = \underbrace{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}}_{=\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}}$

et donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, I_0 - I_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$

Q14. Établir à l'aide des résultats précédents la convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n!}$ et sa somme.

Q 14| Éléments de réponse

De la question précédente, il vient que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = I_0 - I_n$

et donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \underbrace{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}_{=\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}} = 1 + I_0 - I_n$

Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 + I_0$.

Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{1}{k!}$ est convergente, donc par définition, la série $\sum \dfrac{1}{k!}$ est convergente,

et on a par ailleurs que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + I_0$.

Un calcul direct donne alors que :
$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^1 \frac{(1-x)^0}{0!} \mathrm{e}^{\,x}\, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{\,x}\, \mathrm{d}x \\ &= \left[\mathrm{e}^{\,x}\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e}^{\,1} - \mathrm{e}^{\,0} \\ &= \mathrm{e}\, - 1 \end{aligned}$$

et donc il vient que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}\,.$

Partie C | Étude du comportement asymptotique de la série harmonique

On rappelle que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k}$, appelée aussi série harmonique, est une série divergente.

On se propose dans cette partie d'en déterminer le comportement asymptotique, c'est à dire de le « mesurer » à celui de suites de références.

On notera alors $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série harmonique, c'est à dire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q15. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $\forall x \in [k; k+1]\,,\, \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$.

Q 15| Éléments de réponse

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La décroissance sur $[k;k+1]$ de la fonction inverse assure que : $\forall x \in [k;k+1]\,,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{k}$.

Q16. En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$.

Q 16| Éléments de réponse

De l'inégalité précédente, toutes les fonctions intervenants étant continues sur $[k;k+1]$, la croissance de l'intégrale assure alors que : $\underbrace{\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{k+1}} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{k}}$

ce qui est bien l'encadrement attendu.

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant les inégalités précédentes, en déduire que : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n)+1$.

Q 17| Éléments de réponse

De ce qui précède, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$

donc par sommation, il vient que : $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)}_{=\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1)} \leq \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}_{=S_n}$

Sur le même principe, de : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

par sommation, il vient que : $\underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}}_{=\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}} \leq \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right)}_{=\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1)}$

On a donc : $\underbrace{1+\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}}_{=S_{n+1}} \leq \ln(n+1)+1$

et donc il vient que : $S_n \leq \ln(n)+1$.
Finalement, on a bien que : $\ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n)+1$.

Q18. En déduire que $\dfrac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q 18| Éléments de réponse

L'encadrement précédent permet d'écrire que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\,,\ \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \dfrac{S_n}{\ln(n)} \leq 1+\dfrac{1}{\ln(n)}$.

Il est direct que $1+\dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Par ailleurs, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\quad \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$

Il est direct que $1+\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et par composition que $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par quotient que $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ et donc finalement que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Ainsi, par le théorème d'encadrement il vient que $\dfrac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Problème n° 2 | Endomomorphisme dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Dans tout ce problème, on désigne par A, B, C et T les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} `0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par $\mathcal{E}$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Partie A | Étude des éléments de $\mathcal{E}$

Q19. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 19| Éléments de réponse

$\mathcal{E} \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ **:** par construction

Le vecteur nul de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{E}$: en effet, en posant $a=0$, $b=0$ et $c=0$, on a bien que $(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Stabilité de $\mathcal{E}$ par combinaison linéaire : soient $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \\ M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \end{cases}$. On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$.

Par construction, il vient que $M_3 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ 0 & \lambda c_1 + c_2 \end{pmatrix}$ et donc en posant $\begin{cases} a_3 = \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 = \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 = \lambda c_1 + c_2 \end{cases}$, il vient que $M_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$ ce qui assure que $M_3 \in \mathcal{E}$, et donc que $\mathcal{E}$ est bien stable par combinaison linéaire.

Q20. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ formée par les matrices A, B et C est une base de $\mathcal{E}$.

Q 20| Éléments de réponse

On commence par remarquer que :
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A,B,C) \end{aligned}$$

et par suite la famille $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{E}$.
Étudions la liberté de la famille $\mathcal{B}$.
Supposons que l'on ait $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $(\star) : \alpha A + \beta B + \gamma C = (0)$.
$(\star)$ donne donc que l'on a : $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
qui conduit trivialement à $\begin{cases} \alpha &= 0 \\ \beta &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$ et donc que la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre.
Par suite, la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$n et donc c'est une base de $\mathcal{E}$.

Q21. Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Q 21| Éléments de réponse

La famille $\mathcal{B}$ étant une famille base de $\mathcal{E}$ formée de 3 vecteurs, par définition, $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

Q22. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire que : $\forall (M, N) \in \mathcal{E}, MN \in \mathcal{E}$.

Q 22| Éléments de réponse

Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

Un calcul direct donne que $MN = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$ et donc en posant $\begin{cases} a'' &= aa' \\ b'' &= ab' + bc' \\ c'' &= cc' \end{cases}$ on a bien que $MN = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ 0 & c'' \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

Q23. Soit $M \in \mathcal{E}$ que l'on suppose inversible. Montrer alors que M^{-1} appartient aussi à $\mathcal{E}$.

Q 23| Éléments de réponse

Puisque $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$ est inversible, on sait que $M^{-1} = \dfrac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ étant donnés que a et c sont nécessairement non nuls car sinon M n'est pas inversible, c'est à dire que $M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{c} & -\dfrac{b}{ac} \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$ et on a bien $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Partie B | Étude d'un endomorphisme

On désigne par f l'application définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \longmapsto & TMT \end{array} \right.$.

Q24. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q 24| Éléments de réponse

Par construction on a déjà que $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.
Soients $\begin{cases} \lambda &\in \mathbb{R} \\ M_1 &\in \mathcal{E} \\ M_2 &\in \mathcal{E} \end{cases}$ et posons $M_3 = \lambda M_1 + M_2$. Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{aligned} f(M_3) &= TM_3T \\ &= T(\lambda M_1 + M_2)T \\ &= T(\lambda M_1 T + M_2 T) \\ &= \lambda \underbrace{TM_1T}_{=f(M_1)} + \underbrace{TM_2T}_{=f(M_2)} \\ &= \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{aligned}$$
et par suite f est linéaire, et c'est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q25. Vérifier que T est inversible, puis démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Q 25| Éléments de réponse

T est une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible.
Recherchons le noyau de f. On directement que :
$$\begin{aligned} (M \in \operatorname{Ker}(f)) &\Leftrightarrow (TMT = (0)) \\ &\Leftrightarrow \left(T^{-1}MT = T^{-1}(0)\right) \\ &\Leftrightarrow (MT = (0)) \\ &\Leftrightarrow \left(MTT^{-1} = (0)T^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow (M = (0)) \end{aligned}$$
et par suite, il vient que $\operatorname{Ker}(f) = \{(0)\}$ et donc par théorème que f est injectif.
Comme $\mathcal{E}$ est de dimension finie et que f est un endomorphisme injectif de $\mathcal{E}$, par le théorème de caractérisation des automorphismes, f est bijectif.

Q26. Déterminer $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ et les exprimer en fonction de A, B et C.

Q 26| Éléments de réponse

Des calculs directs donnent que :
$$\begin{aligned} f(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= A + B \end{aligned}$$
puis que :
$$\begin{aligned} f(B) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$
et finalement que :
$$\begin{aligned} f(C) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= B + C \end{aligned}$$

Q27. Déterminer alors la matrice F de f dans la base $\mathcal{B} = (A, B, C)$

Q 27| Éléments de réponse

Puisque $f(A) = A + B$, $f(B) = B$ et $f(C) = B + C$, par construction, la matrice F de f dans la base $\mathcal{B} = (A, B, C)$ est :
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie C | Décomposition de f

Dans tout ce qui suit, on note $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q28. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$ d'inconnue la matrice $M \in \mathcal{E}$.

Q 28| Éléments de réponse

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, un calcul direct donne que $f(M) = \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
(f(M) = \lambda M) &\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda c \end{pmatrix} \right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)a & = 0 \\ (1-\lambda)a + b + \quad c & = 0 \\ \quad (1-\lambda)c & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \text{ car } \lambda \neq 1 \\ c & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (M = (0))
\end{aligned}$$

Q29. Calculer H^2, puis pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{I}_3 + aH)^n$.

Q 29| Éléments de réponse

Un calcul direct donne que $H^2 = 0$.

Par ailleurs, on a que $\mathrm{I}_3 H = \mathrm{I}_3 H$ ce qui assure que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \ (\mathrm{I}_3 + aH)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\mathrm{I}_3)^{n-k} (aH)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k H^k \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k H^k \\
&= \binom{n}{0} a^0 K^0 + \binom{n}{1} a^1 H^1 \\
&= \mathrm{I}_3 + anH
\end{aligned}$$

cette relation étant encore trivialement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ ce qui donne que : $\forall n \in \mathbb{N}, (\mathrm{I}_3 + aH)^n = \mathrm{I}_3 + anH$

Q30. Calculer F^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 30| Éléments de réponse

On remarque que $F = I + H$, et donc il vient que $F^n = I + nH$ et donc que $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q31. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.

Q 31| Éléments de réponse

La matrice $\mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}H$ est telle que : $\left(\mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}H\right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ainsi, on pose $G = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}H$ et on a bien que $G^3 = F$.

Q32. Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Q 32| Éléments de réponse

En considérant l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (A, B, C)$ est la matrice G, la relation matricielle $G^3 = F$ se traduit en termes d'endomorphismes par $g \circ g \circ g = f$.

Problème n° 3 | Calcul des puissances d'une matrice

Dans tout ce problème, on désigne par $J_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

On note I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Partie A | Étude d'un endomorphisme

On considère alors l'application f définie par :
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M = \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} & \longmapsto & M + (a+d)\mathrm{I}_2 \end{array} \right.$$

Q33. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 33| Éléments de réponse

Par construction on a déjà que $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Soient $\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ M_1 = \begin{pmatrix}a_1&c_1\\b_1&d_1\end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M_2 = \begin{pmatrix}a_2&c_2\\b_2&d_2\end{pmatrix} & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

On pose $M_3 = \lambda M_1 + M_2$ où si l'on note $M_3 = \begin{pmatrix}a_3&c_3\\b_3&d_3\end{pmatrix}$, on a les relations $\left\{ \begin{array}{rcl} a_3 & = & \lambda a_1 + a_2 \\ b_3 & = & \lambda b_1 + b_2 \\ c_3 & = & \lambda c_1 + c_2 \\ d_3 & = & \lambda d_1 + d_2 \end{array} \right.$

Montrons que $f(M_3) = \lambda f(M_1) + f(M_2)$.

Un calcul direct donne que :
$$\begin{array}{rcl} f(M_3) & = & M_3 + (a_3 + c_3)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + M_2 + (\lambda a_1 + a_2 + \lambda d_1 + d_2)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + M_2 + (\lambda a_1 + \lambda d_1)\mathrm{I}_2 + (a_2 + d_2)\mathrm{I}_2 \\ & = & \lambda M_1 + \lambda(a_1 + d_1)\mathrm{I}_2 + \underbrace{M_2 + (a_2 + d_2)\mathrm{I}_2}_{=f(M_2)} \\ & = & \lambda \underbrace{(M_1 + (a_1 + c_1)\mathrm{I}_2)}_{=f(M_1)} + f(M_2) \\ & = & \lambda f(M_1) + f(M_2) \end{array}$$

et ainsi f est bien linéaire et c'est donc un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q34. Exprimer les images des vecteurs de la famille $\mathcal{B}$ en fonction des vecteurs de cette même famille.

Q 34| Éléments de réponse

Des calculs directs donnent que :
$$f(J_1) = \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix} \quad f(J_2) = \begin{pmatrix}0&1\\0&\end{pmatrix} \quad f(J_3) = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \quad f(J_4) = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

ce qui donne que : $\left\{ \begin{array}{rcl} f(J_1) & = & 2J_1 + J_4 \\ f(J_2) & = & J_2 \\ f(J_3) & = & J_3 \\ f(J_4) & = & J_1 + 2J_4 \end{array} \right.$

Q35. Vérifier que la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est $A = \begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$.

Q 35| Éléments de réponse

Des relations $\begin{cases} f(J_1) &= 2J_1 + J_4 \\ f(J_2) &= J_2 \\ f(J_3) &= J_3 \\ f(J_4) &= J_1 + 2J_4 \end{cases}$ par construction de la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$, on a bien que $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B | Changement de base pour f

Q36. Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 36| Éléments de réponse

Étudions la liberté de la famille $\mathcal{C}$.
Supposons que l'on ait $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $(\star) : \lambda_1(J_1 - J_4) + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 \mathrm{I}_2 = (0)$.
Un calcul direct donne que $(\star)$ est : $(\star)$, $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
et par suite, par identification des coefficients, il vient que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_4)$ est solution du système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ dont un échelonnement en lignes donne que :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Ce dernier étant alors un sytème carré 4×4 homogène de rang 4 par théorème, il admet une unique solution qui est la solution triviale $\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_4 &= 0 \end{cases}$
Finalement, on en déduit que la famille $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
Il s'agit donc d'une famille libre de 4 vecteurs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, donc par théorème, elle en forme une base.

Q37. Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$.

Q 37| Éléments de réponse

Il s'agit donc de déterminer les images de vecteurs de la famille $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$ et de les exprimer en fonction des vecteurs de cette même famille.
Par linéarité de f, on a que : $\begin{aligned} f\ \ f(J_1 - J_4) &= f(J_1) - f(J_4) \\ &= 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 \\ &= J_1 - J_4 \end{aligned}$
et un calcul direct donne que $f(\mathrm{I}_2) = 3\mathrm{I}_2$.

Par suite, par construction, la matrice de f dans la base $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, \mathrm{I}_2)$ est $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Q38. En déduire l'existence d'une matrice P inversible que l'on explicitera telle que $A = PDP^{-1}$.

Q 38| Éléments de réponse

En notant P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, d'après les formules de changement de base, on a que $D = P^{-1}AP$ et donc que $A = PDP^{-1}$.

Par ailleurs, par construction, la matrice P est donnée par : $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie C | Puissances de la matrice A

Q39. Déterminer l'inverse de la matrice P trouvée à la question précédente.

Q 39| Éléments de réponse

On recherche l'inverse de P par un échelonnement réduit en lignes :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_4}{\sim_L}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{2}L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Q40. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

Q 40| Éléments de réponse

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $A^n = PD^nP^{-1}$ »
Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation : on a que $A^0 = \mathrm{I}_3$ et que $D^0 = \mathrm{I}_3$ puis que : $\begin{aligned} PD^0P^{-1} &= P\mathrm{I}_3P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= \mathrm{I}_3 \end{aligned}$

ce qui assure que $A^0 = PD^0P^{-1}$ est donc que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition $A^{n+1} = A^n \times A$.
Comme $A = PDP^{-1}$ et que $A^n = PD^nP^{-1}$ par hypothèse de récurrece, il vient que :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1}PDP^{-1} \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

Q41. En déduire explicitement la matrice A^n.

Q 41| Éléments de réponse

La matrice D étant triangulaire, on peut montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\, D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

puis un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{3^n}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{-1+3^n}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+3^n}{2} & 0 & 0 & \frac{1+3^n}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$